

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CENTRO-OESTE**

**JOÃO VITOR CORDEIRO**

**EXPLORANDO A MECÂNICA QUÂNTICA ATRAVÉS DE  
FÓTONS POLARIZADOS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA  
PARA O ENTENDIMENTO DE ALGORITMOS  
QUÂNTICOS**

**GUARAPUAVA**

**2024**

**JOÃO VITOR CORDEIRO**

**EXPLORANDO A MECÂNICA QUÂNTICA ATRAVÉS DE FÓTONS  
POLARIZADOS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O  
ENTENDIMENTO DE ALGORITMOS QUÂNTICOS**

**Exploring Quantum Mechanics through Polarized Photons: A Didactic  
Sequence for Understanding Quantum Algorithms**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC)  
apresentado ao Departamento de Física, da  
UNICENTRO, para aprovação no curso de  
graduação em Licenciatura em Física.

Orientador: Dr.Prof.Paulo José dos Reis

**GUARAPUAVA  
2024**

*Dedico este trabalho à minha família, amigos e professores que acompanharam a minha formação.*

## AGRADECIMENTOS

Gostaria, primeiramente, de agradecer aos meus pais, Daniela e Robertt, pela confiança, paciência e por sempre me apoiarem a continuar na carreira acadêmica. Se não fosse por vocês, eu não estaria onde estou hoje.

Expresso minha gratidão ao professor Dr. Pedro Pablo Gonzáles Borrero. e ao orientador Dr. Paulo José dos Reis, que, por muito tempo, acompanharam minha formação e fortaleceram o desenvolvimento da minha maturidade acadêmica.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro viabilizado com programas de aperfeiçoamento nos quais participei durante a graduação.

Agradeço aos meus amigos Cristhian, Ana Flavia e Winicius, que conheci nesta graduação, pelos momentos de apoio e diversão.

Por fim, mas não menos importante, agradeço a todos os professores do departamento de física por corroborarem com a educação do ensino superior.

*“Se pude enxergar mais longe, foi porque me apoiei em ombros de gigantes.” - Isaac Newton.*

## RESUMO

CORDEIRO, J.V. **Explorando a mecânica quântica através de fótons polarizados: uma sequência didática para o entendimento de algoritmos quânticos**. 2024. 79 f. ( em ) – Universidade Estadual do Centro-Oeste, GUARAPUAVA, 2024.

No final do século XX, alcançou-se um marco histórico fundamental no avanço da computação quântica e da informação quântica, com a capacidade de exercer controle total sobre sistemas quânticos isolados. Esse controle preciso permitiu explorar todo o potencial da mecânica quântica em aplicações relacionadas à computação e informação quântica. Atualmente, esta tecnologia revolucionou áreas como a criptografia, simulações de sistemas complexos e otimização de algoritmos, mostrando um grande potencial no processamento de informação. Contudo, a falta de divulgação adequada da teoria quântica representa um desafio significativo para despertar a curiosidade do público e promover uma melhor compreensão do ambiente em que vivemos. A deficiência na divulgação desse conhecimento compromete a melhoria na alfabetização científica, dificultando o enfrentamento das pseudociências que existem atualmente. Além disso, a não compreensão da teoria quântica também pode impactar negativamente o potencial de inovação tecnológica do país. O estudo dos estados de polarização de fótons oferece uma abordagem intuitiva e acessível para introduzir os princípios da mecânica quântica. Esta proposta, análoga ao experimento de Stern-Gerlach frequentemente abordado em cursos de graduação, estabelece uma base conceitual para a compreensão da computação quântica. A metodologia envolveu uma revisão bibliográfica de artigos e livros sobre os fundamentos da mecânica quântica, com foco na polarização de fótons. Essa base possibilitou uma compreensão mais fácil dos circuitos e algoritmos quânticos. Para verificar os conceitos estudados, foram realizadas simulações de sistemas quânticos usando o *software* Q-kit. Como resultado, foi organizado um material didático técnico e introdutório para a teoria quântica e computação quântica, abordando alguns dos principais postulados da mecânica quântica no regime de fótons polarizados, servindo como base para apresentar os fundamentos da computação quântica como o qubit, portas quânticas, e algoritmo de Grover. Posteriormente, foi aplicado todo o conhecimento do algoritmo de Grover e acompanhando a validade dos conceitos utilizando o software Q-kit para um estado com dois qubit.

Palavras-chave: polarização; mecânica quântica; circuitos quânticos, algoritmo de Grover.

## ABSTRACT

CORDEIRO, J.V. **Exploring Quantum Mechanics through Polarized Photons: A Didactic Sequence for Understanding Quantum Algorithms**. 2024. 79 f. ( em ) – Universidade Estadual do Centro-Oeste, GUARAPUAVA, 2024. Título original: Explorando a mecânica quântica através de fótons polarizados: uma sequência didática para o entendimento de algoritmos quânticos

At the end of the 20th century, a fundamental historical milestone was achieved in the advancement of quantum computing and quantum information, with the ability to exert total control over isolated quantum systems. This precise control has allowed for the exploration of the full potential of quantum mechanics in applications related to quantum computing and information. Currently, this technology has revolutionized areas such as cryptography, simulations of complex systems, and algorithm optimization, showing great potential in information processing. However, the lack of adequate dissemination of quantum theory represents a significant challenge in sparking public curiosity and promoting a better understanding of the environment in which we live. The deficiency in the dissemination of this knowledge compromises improvements in scientific literacy, making it difficult to combat the pseudosciences that currently exist. Additionally, a lack of understanding of quantum theory can also negatively impact the country's potential for technological innovation. The study of photon polarization states offers an intuitive and accessible approach to introducing the principles of quantum mechanics. This proposal, analogous to the Stern-Gerlach experiment often addressed in undergraduate courses, establishes a conceptual basis for understanding quantum computing. The methodology involved a literature review of articles and books on the fundamentals of quantum mechanics, focusing on photon polarization. This foundation enabled an easier understanding of quantum circuits and algorithms. To verify the concepts studied, simulations of quantum systems were performed using the Q-kit software. As a result, technical and introductory educational material on quantum theory and quantum computing was organized, addressing some of the key postulates of quantum mechanics in the regime of polarized photons, serving as a basis for presenting the fundamentals of quantum computing such as the qubit, quantum gates, and the Grover algorithm. Subsequently, all the knowledge of the Grover algorithm was applied, and the validity of the concepts was monitored using the Q-kit software for a state with two qubits.

Keywords: polarization; quantum mechanics; quantum circuits; Grover's algorithm.

## LISTA DE FIGURAS

1	Representação do experimento de Young com ondas clássicas. Adaptado de [2]. . . . .	19
2	Representação da intensidade observada no anteparo para $I_1$ , $I_2$ e $I_{12}$ . Adaptado de [2]. . . . .	19
3	Representação do experimento de Young com partículas clássicas. Adaptado de [2]. . . . .	20
4	Representação da probabilidade observada no anteparo para $\mathcal{P}_1$ , $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_{12}$ . Adaptado de [2]. . . . .	20
5	Representação do experimento de Young com partículas clássicas. Adaptado de [2]. . . . .	22
6	Representação da intensidade observada no anteparo para $\mathcal{P}_1$ , $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_{12}$ . Adaptado de [2]. . . . .	22
7	Efeito de polarização da luz. Produzido pelo autor. . . . .	24
8	Utilização de um analisador em sequência do polarizador. Produzido pelo autor. . . . .	25
9	Plano frontal perpendicular à direção de propagação $z$ . Tanto o vetor campo elétrico quanto vetor polarização oscilam neste plano. Produzido pelo autor. . . . .	27
10	Plano frontal perpendicular à direção de propagação $z$ com ângulo arbitrário. Note que $\vec{E}$ oscila no plano. Produzido pelo autor. . . . .	27
11	Campo elétrico oscilando horizontalmente. Produzido pelo autor. . . . .	28
12	Campo elétrico oscilando verticalmente. Produzido pelo autor. . . . .	28
13	Vetor campo elétrico estará sempre localizado sobre um círculo de raio $E/\sqrt{2}$ . Produzido pelo autor. . . . .	29
14	Representação de uma moeda hipotética contendo face cara (C) e face coroa (C'). Produzido pelo autor. . . . .	43
15	Representação das seis faces de um dado. Produzido pelo autor. . . . .	44
16	Representação de um diagrama de circuito para um único bit. Produzido pelo autor. . . . .	46
17	Representação esquemática da porta identidade. Como esta porta não altera o bit de entrada $A$ , teremos $A$ como bit de saída. Produzido pelo autor. . . . .	47
18	Representação alternativa da porta identidade. Produzido pelo autor. . . . .	47



19	Representação da porta <i>NOT</i> . Produzida pelo autor. . . . .	48
20	Representação de um diagrama de circuito para dois bit de entrada. Produzida pelo autor. . . . .	49
21	Representação de um diagrama de circuito para a porta <i>AND</i> . Produzida pelo autor. . . . .	50
22	Representação de um diagrama de circuito para a porta <i>OR</i> . Produzida pelo autor. . . . .	50
23	Representação de um diagrama de circuito para a porta <i>XOR</i> . Produzida pelo autor. . . . .	51
24	Representação de um diagrama de circuito para a porta <i>NAND</i> . Produzida pelo autor. . . . .	51
25	Representação de um diagrama de circuito para a porta <i>NOR</i> . Produzida pelo autor. . . . .	52
26	Circuito elétrico inicial. Corrente elétrica flui pelo circuito, iluminando a lâmpada. Produzido pelo autor, adaptado de [6]. . . . .	53
27	Circuito com chaveamento fechado. Corrente elétrica percorre caminho de menor resistência. Produzido pelo autor, adaptado de [6] . . . . .	53
28	Representação de $ \psi\rangle$ na esfera de Bloch. Produzida pelo autor, adaptado de [1]. . . . .	56
29	Representação da porta <i>CNOT</i> . Produzido pelo autor. . . . .	61
30	Exemplo de uma trilha para um qubit iniciado no estado $ 0\rangle$ . Produzido pelo autor. . . . .	61
31	Exemplo de uma trilha para um qubit com portas quânticas atuando sobre o mesmo. Produzido pelo autor. . . . .	61
32	Exemplo de uma trilha para $n$ qubits iniciados em estados escolhidos por acaso. Produzido pelo autor. . . . .	62
33	Diagrama de circuito quântico para dois qubits. A porta Hadamard atua no qubit acima enquanto a porta identidade atua no qubit abaixo. Produzido pelo autor. . . . .	63
34	Uma representação do oráculo. Produzido pelo autor. . . . .	64
35	Mudança de fase do estado $ 5\rangle$ causada pelo oráculo. Produzido pelo autor. . . . .	64
36	Iteração completa do algoritmo de Grover. Produzido pelo autor. . . . .	65
37	Interface do <i>software Q-kit</i> . . . . .	65
38	Circuito completo realizada no software Q-kit para o estado $ 11\rangle$ . . . . .	70
39	Medição do estado final realizada no programa. . . . .	71
40	Circuito completo realizada no software Q-kit para o estado $ 00\rangle$ . . . . .	74
41	Circuito completo realizada no software Q-kit para o estado $ 01\rangle$ . . . . .	76

42	Circuito completo realizada no software Q-kit para o estado $ 10\rangle$ . . . . .	78
----	--	----

## LISTA DE TABELAS

1	Representação das cores do arco-íris associadas aos possíveis estados de três moedas e dois dados. Adaptado de [6]. . . . .	45
2	Exemplo de sistemas de dois estados. Adaptado de [6]. . . . .	45
3	Exemplo de tabela verdade para um bit. Como não especificamos a porta utilizada, o bit de saída está com interrogação. . . . .	47
4	Tabela verdade da porta identidade. . . . .	47
5	Tabela verdade da porta <i>NOT</i> . . . . .	48
6	Tabela verdade da porta <i>always 0</i> . . . . .	48
7	Tabela verdade da porta <i>always 1</i> . . . . .	49
8	Exemplo de tabela verdade para dois bits. Novamente, como não especificamos a porta utilizada, os bits de saída estão com interrogação. . .	49
9	Tabela verdade da porta <i>AND</i> . . . . .	50
10	Tabela verdade da porta <i>OR</i> . . . . .	50
11	Tabela verdade da porta <i>XOR</i> . . . . .	51
12	Tabela verdade da porta <i>NAND</i> . . . . .	51
13	Tabela verdade da porta <i>NOR</i> . . . . .	52
14	Tabela verdade obtida no exemplo . . . . .	53

## LISTA DE SIGLAS

NASA	Administração Nacional do Espaço e da Aeronáutica
NOT	Porta lógica NOT
AND	Porta lógica AND
OR	Porta lógica OR
XOR	Porta lógica <i>Exclusive OR</i>
NAND	Porta lógica NAND
NOR	Porta lógica NOR
X	Porta quântica <i>Pauli X</i>
Y	Porta quântica <i>Pauli Y</i>
Z	Porta quântica <i>Pauli Z</i>
H	Porta quântica <i>Hadamard H</i>
<i>CNOT</i>	Porta quântica “não controlado”

## LISTA DE SÍMBOLOS

$I$	Intensidade
$\psi(x)$	Função de onda
$h$	Constante de Planck
$\vec{E}$	Vetor Campo Eletromagnético
$x$	Eixo $x$
$\vec{B}$	Vetor Campo Magnético
$y$	Eixo $y$
$z$	Eixo $z$
$\hat{x}$	Vetor unitário da direção $x$
$\hat{y}$	Vetor unitário da direção $y$
$k$	Número de onda
$\omega$	Frequência angular
$i$	Número Imaginário
$\vec{P}$	Vetor polarização
$\pi$	Número Pi
$\text{sen}(u)$	Função Seno
$ v\rangle$	Vetor de estado $v$
$\langle v $	Vetor de estado complexo conjugado de $v$
$\delta$	Delta de <i>Kronecker</i>
$\hat{A}$	Operador
$\lambda$	Autovalor associado a um operador
$\hat{\Pi}$	Operador projeção
$\hat{I}$	Operador identidade
$\langle \hat{A} \rangle_c$	Valor médio da gradeza $A$ no estado $ c\rangle$
$ +\rangle$	Base qubit
$ -\rangle$	Base qubit

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>DESENVOLVIMENTO</b>	<b>18</b>
2.1	FUNDAMENTOS DA TEORIA QUÂNTICA. . . . .	18
2.1.1	Experimento de Young com ondas clássicas. . . . .	18
2.1.2	Experimento de Young com partículas clássicas . . . . .	20
2.1.3	Experimento de Young com elétrons . . . . .	21
2.1.4	Uma interpretação probabilística . . . . .	22
2.2	POLARIZAÇÃO DA LUZ . . . . .	24
2.2.1	Decomposição da polarização em bases ortonormais . . . . .	30
2.3	NOTAÇÃO DE DIRAC E FERRAMENTAL MATEMÁTICO BÁSICO .	31
2.4	ESTADOS DE POLARIZAÇÃO DA LUZ: TRATAMENTO UTILIZANDO FÓTONS POLARIZADOS . . . . .	34
2.5	OPERADORES E OBSERVÁVEIS . . . . .	36
2.5.1	Representação matricial de $\hat{A}$ . . . . .	37
2.5.2	Observáveis hermitianos . . . . .	38
2.6	O OPERADOR PROJEÇÃO . . . . .	40
2.7	O VALOR MÉDIO . . . . .	41
2.8	COMPUTAÇÃO CLÁSSICA: UMA REVISÃO . . . . .	42
2.8.1	Bits . . . . .	43
2.8.2	Codificando informações . . . . .	44
2.8.3	Portas Lógicas . . . . .	46
2.8.3.1	Portas de um único bit . . . . .	46

2.8.3.2	Portas para dois bits . . . . .	49
2.8.3.3	Exemplo para um bit . . . . .	52
2.9	COMPUTAÇÃO QUÂNTICA . . . . .	53
2.9.1	O qubit . . . . .	54
2.9.1.1	Representação do qubit . . . . .	55
2.9.1.2	Múltiplos Qubits . . . . .	56
2.9.2	Portas quânticas: Operações sobre qubits . . . . .	58
2.9.2.1	Portas quânticas comuns para um qubit . . . . .	58
2.9.2.2	Portas quânticas para dois qubits . . . . .	60
2.9.3	Circuitos quânticos . . . . .	61
2.9.4	Algoritmo de busca de Grover . . . . .	63
2.9.5	Apresentação do <i>software Q-kit</i> . . . . .	65
2.9.6	Algoritmo de Grover: Exemplo utilizando dois qubits . . . . .	66
<b>3</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>72</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>73</b>
	<b>Apêndice A – SOLUÇÃO DE OUTROS ESTADOS DA SEÇÃO 2.9.6.</b>	<b>74</b>
A.1	SOLUÇÃO PARA O ESTADO $ 00\rangle$ . . . . .	74
A.2	SOLUÇÃO PARA O ESTADO $ 01\rangle$ . . . . .	76
A.3	SOLUÇÃO PARA O ESTADO $ 10\rangle$ . . . . .	78

## 1 INTRODUÇÃO

O Século XX desempenhou um papel de extrema importância na revolução da ciência, especialmente no campo da física. Um marco significativo desse período ocorreu em 1920, resultando no surgimento da mecânica quântica. Essa teoria logo se tornou fundamental no mundo científico, encontrando aplicações bem-sucedidas em diversos estudos, incluindo a estrutura dos átomos, a composição do DNA e a compreensão das partículas elementares da natureza [1].

Podemos conceber a mecânica quântica como uma estrutura matemática ou um conjunto de regras que serve de base para a construção de teorias físicas. Um exemplo claro desse conceito é a Eletrodinâmica Quântica, que se desenvolve a partir dos princípios fundamentais da mecânica quântica, mas também incorpora regras específicas que não são diretamente derivadas dessa teoria. Essa relação pode ser comparada à interação entre um sistema operacional de computador e um programa aplicativo específico. O sistema operacional fornece os parâmetros e os modos de operação básicos, enquanto o programa determina como tarefas específicas devem ser executadas dentro desse ambiente [1].

As regras da mecânica quântica, embora simples em sua formulação, são consideradas não intuitivas até mesmo por especialistas. Para torná-la mais compreensível, renomados físicos têm debatido intensamente sobre o assunto. Na década de 1970, ocorreu um avanço histórico significativo relacionado ao desenvolvimento da computação quântica e da informação quântica, quando se tornou possível obter um controle completo sobre sistemas quânticos isolados. Antes desse período, as aplicações da mecânica quântica envolviam um controle rudimentar sobre amostras macroscópicas que continham inúmeros sistemas quânticos, sendo que nenhum deles podia ser acessado diretamente de forma individual. Após a década de 1970, uma variedade de técnicas foi desenvolvida, permitindo o controle individual de sistemas quânticos. Por exemplo, métodos de confinamento de átomos individuais em armadilhas atômicas foram criados, isolando esses átomos do restante do universo. Isso nos concedeu a capacidade de examinar diversos aspectos de seu comportamento com uma precisão incrível. Ao obtermos controle sobre sistemas quânticos individuais, estamos adentrando em territórios da Natureza que até então permaneciam intocados, na esperança de descobrir fenômenos novos e inesperados [1].

A computação e a informação quântica apresentam uma série de desafios com diferentes níveis de complexidade para aqueles que estão desenvolvendo novos métodos de manipulação de sistemas quânticos individuais. Esses desafios estimulam a criação



de novas técnicas experimentais e apontam para direções empolgantes na condução de experimentos. O controle de sistemas quânticos individuais nos permitirá explorar todo o potencial da mecânica quântica em aplicações relacionadas à computação e informação quântica [1].

Apesar dos avanços, a construção de sistemas para o processamento da informação quântica ainda enfrenta obstáculos significativos. Continua sendo um desafio para os físicos e engenheiros do futuro desenvolverem técnicas que tornem o processamento da informação quântica em larga escala uma realidade [1].

Tornar o conhecimento da mecânica quântica mais acessível ao público ajuda a mostrar um novo mundo praticamente invisível a olho nu, o mundo das partículas subatômicas, estimula a curiosidade do público a buscar cada vez mais o conhecimento científico e melhorar a alfabetização científica, que, por consequência, poderá ajudar a desmistificar mitos e pseudociências que infelizmente estão presentes no dia a dia e impulsionar a inovação tecnológica do país.

Portanto, o presente trabalho teve como objetivo guiar o leitor por meio de uma sequência didática abordando os princípios da mecânica quântica no regime de fótons polarizados. Conceitos como superposição de estados quânticos, operadores, probabilidades e dentre mais serão discutidos nesse trabalho. Assim, obtendo um entendimento favorável para o estudo e desenvolvimento da computação quântica, circuitos quânticos e algoritmo de Grover em específico.

## 2 DESENVOLVIMENTO

Os resultados apresentados discorrem de todo o processo de estudo feito durante o período orientado, dividido em: estudo da polarização da luz, estados de polarização da luz, regras para observáveis, uma introdução sobre algoritmos quânticos e, por fim, o algoritmo de busca quântica de Grover.

### 2.1 FUNDAMENTOS DA TEORIA QUÂNTICA.

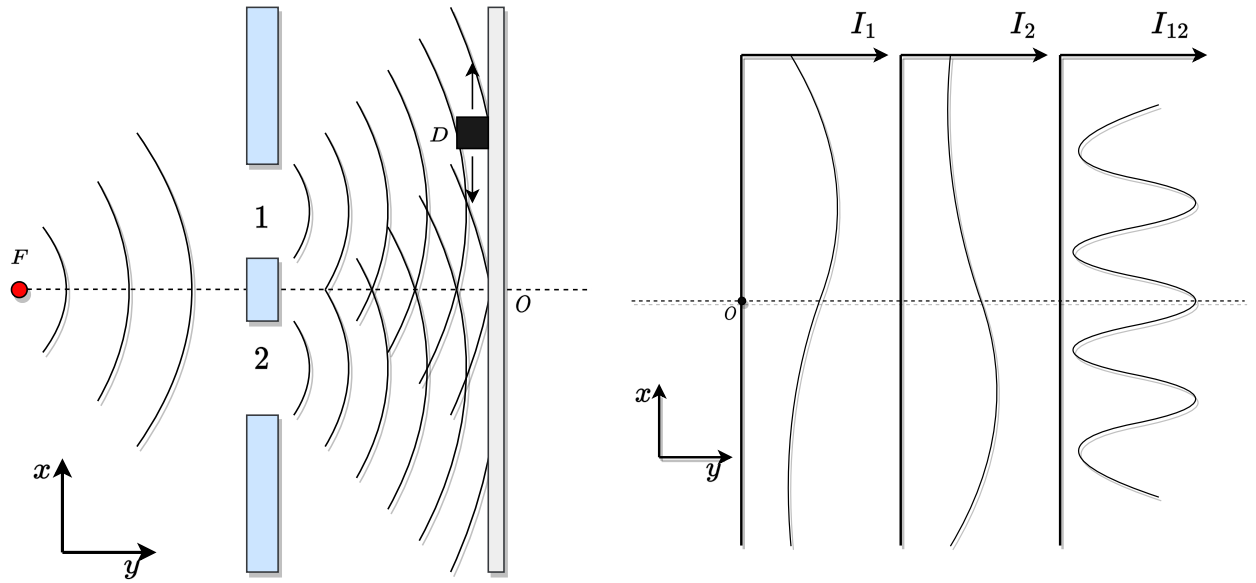
O experimento realizado por Thomas Young em 1801 foi fundamental para repensarmos o comportamento da luz em termos de ondas. Este foi o primeiro experimento que evidenciou satisfatoriamente o comportamento ondulatório da luz utilizando o conceito de interferência de ondas [2]. Utilizaremos este experimento para estudar um fundamento essencial que a mecânica quântica é baseada, além de definirmos com maior precisão o contraste entre “comportamento ondulatório” e “comportamento corpuscular” [2].

#### 2.1.1 Experimento de Young com ondas clássicas.

Pensaremos em ondas clássicas como um tipo de onda macroscópica se propagando em um meio, por exemplo, uma onda sonora se propagando no ar. Devemos aqui considerar que estas ondas são puntiformes de fonte coerente (a fase da onda não muda com o tempo) no ponto  $F$ , incidindo em um par de aberturas, na qual é difratada e incidem em um anteparo de observação que consiste em um detector móvel  $D$  varrendo o anteparo na direção  $x$ , conforme Figura 1. Vale ressaltar que é necessário que o comprimento da onda seja da mesma ordem da abertura da fenda para que o fenômeno de difração ocorra [2].

Veja Figura 2. Note que, ao tapar a fenda de número dois e deixando então apenas a fenda número um aberta, é observado uma faixa de intensidade  $I_1$ . Analogamente, ao taparmos a fenda de número um e deixando apenas a fenda de número dois aberta, podemos observar uma faixa de intensidade  $I_2$ . Devido a isso, temos [2]:

$$I_j(x) = |\phi_j(x)|^2 \quad (j = 1, 2) \quad (1)$$



**Figura 1** – Representação do experimento de Young com ondas clássicas. Adaptado de [2].

**Figura 2** – Representação da intensidade observada no anteparo para  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_{12}$ . Adaptado de [2].

A intensidade  $I_{12}$ , que consiste em ambas as fendas abertas, é dada por:

$$I_{12}(x) = |\phi_1(x) + \phi_2(x)|^2$$

Sendo  $\phi_1(x)$  e  $\phi_2(x)$  as amplitudes das ondas detectadas para as fendas um e dois abertas, respectivamente. A Eq. 1 é equivalente como:

$$I_{12}(x) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \quad (2)$$

Onde  $\Delta \equiv \delta_2 - \delta_1$  corresponde à diferença de fase entre as duas ondas. Note que  $I_{12} \neq I_1 + I_2$ , devido:

$$\vec{\phi}_j(x) = |\phi_j(x)| e^{i\delta_j} \quad (j = 1, 2)$$

Sendo  $\delta_j$  o versor da direção de propagação das ondas. Tomando o módulo quadrado da soma de  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , obtemos a Eq. 2 [2].

Vale ressaltar de que o que observamos no anteparo (um observável) é a intensidade  $I(x)$  de detecção, que é proporcional ao módulo quadrado de  $\phi$ . Portanto:

$$\boxed{\text{Intensidade} \propto |\text{amplitude}|^2}$$

$$\boxed{I \propto |\phi|^2} \longrightarrow \text{É um observável.}$$

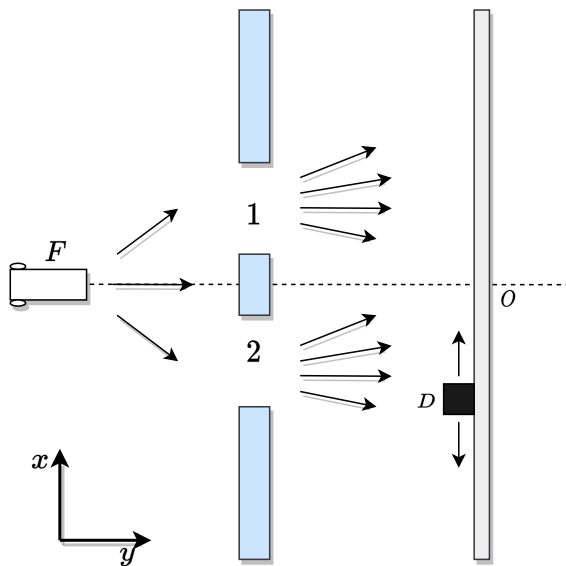
Caso fomos diminuindo a intensidade da fonte sonora, as franjas de interferência

irão diminuindo de forma gradual. E também, ao fecharmos uma das fendas, a intensidade  $I_{12}(x)$  pode tanto diminuir como aumentar, dependendo da posição de  $x$  [2].

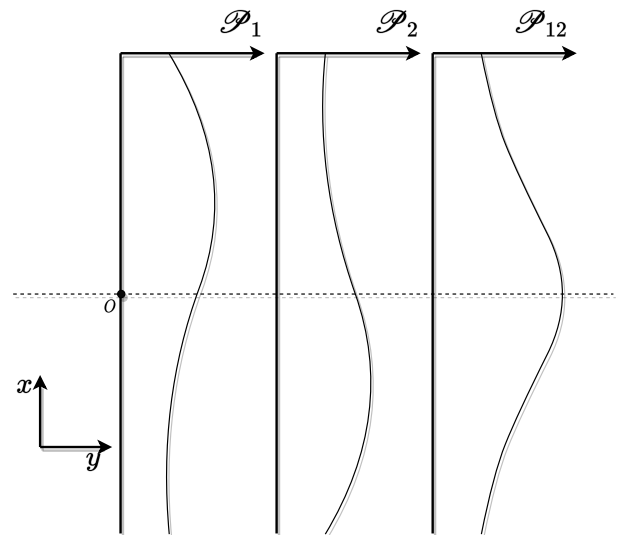
### 2.1.2 Experimento de Young com partículas clássicas

A melhor maneira de analisar esta modificação do experimento de Young é imaginar uma metralhadora fixa no ponto  $F$  que dispara balas (partículas clássicas) de forma aleatória, conforme Figura 3. Supomos aqui as seguintes características [2]:

- I. A taxa de disparo seja constante (ou seja, a razão do número de balas por unidade de tempo seja constante). O detector  $D$  varre o anteparo de observação registrando agora a probabilidade  $\mathcal{P}(x)dx$  de encontrar uma bala entre  $x$  e  $dx$ , portanto, sendo a razão do número de balas detectadas neste intervalo por unidade de tempo com a taxa de disparo.
- II. Não é possível detectar uma fração de balas.
- III. Cada bala irá passar ou pela fenda um ou dois. São eventos independentes e mutuamente exclusivos.



**Figura 3** – Representação do experimento de Young com partículas clássicas. Adaptado de [2].



**Figura 4** – Representação da probabilidade observada no anteparo para  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  e  $\mathcal{P}_{12}$ . Adaptado de [2].

Seja  $\mathcal{P}_1(x)$  e  $\mathcal{P}_2(x)$  as distribuições quando somente as fendas 1 e 2 estão abertas, respectivamente, temos que a distribuição  $\mathcal{P}_{12}$  observada com ambas as fendas abertas será (veja Figura 4):

$$\mathcal{P}_{12}(x) = \mathcal{P}_1(x) + \mathcal{P}_2(x) \quad (3)$$

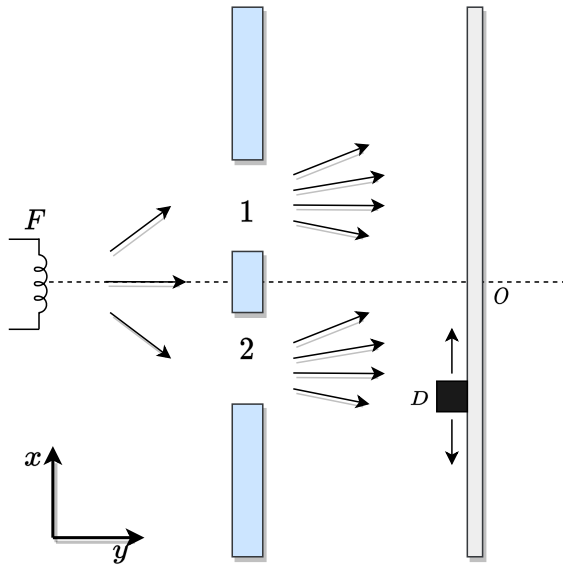
Note que caso uma das fendas seja fechada, a distribuição  $\mathcal{P}_{12}$  tenderá apenas a diminuir [2].

### 2.1.3 Experimento de Young com elétrons

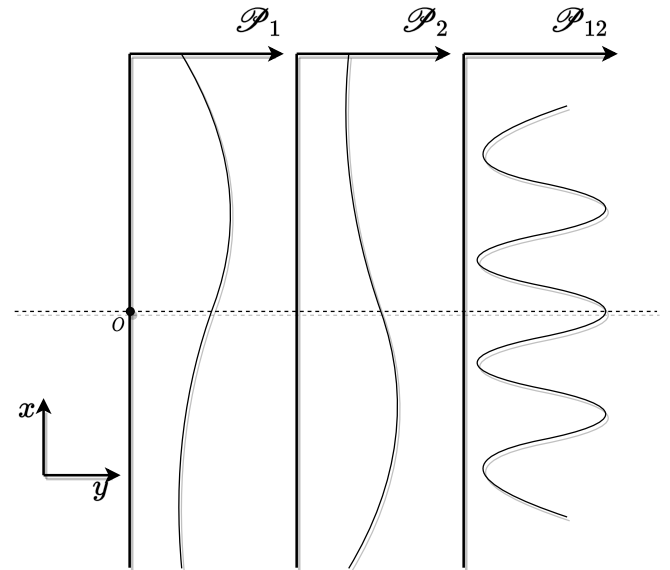
Considere agora que a fonte  $F$  agora seja um filamento de tungstênio que pode ser aquecido fazendo com que elétrons sejam ejetados do filamento por efeito termiônico e acelerados em direção às fendas até o detector, na qual é um contador Geiger (aparelho utilizado para detectar a taxa de radiação incidida no mesmo). Veja Figura 5 e Figura 6. A partir disto, é possível notar as seguintes características:

- I. O Detector registra apenas números inteiros de elétrons, nunca uma fração de elétrons (como o caso de partículas clássicas);
- II. É possível fazer com que os elétrons cheguem um a um no detector, tornando a fonte um emissor suficientemente fraco. Sendo assim, eles chegam em pontos  $x$  distribuídos por acaso, sendo possível então medir as distribuições  $\mathcal{P}_j(x)$ , com  $j = 1, 2$  (correspondente às fendas abertas) e também a distribuição  $\mathcal{P}_{12}(x)$  com as duas fendas abertas (como o caso de partículas clássicas);
- III. Ao acumular as contagens de uma fonte suficientemente fraca durante um longo tempo, obtém-se franjas de interferência em  $\mathcal{P}_{12}(x)$ , idênticas às ondas mecânicas. Portanto,  $\mathcal{P}_{12}(x) \neq \mathcal{P}_1(x) + \mathcal{P}_2(x)$ ;
- IV. Ao fechar uma das fendas,  $\mathcal{P}_{12}(x)$  pode tanto diminuir como aumentar, semelhante às ondas clássicas, dependendo da posição de  $x$ .

Notamos que as propriedades I e II se manifestam como características de partículas clássicas e III juntamente com IV se manifestam como características de ondas mecânicas. Podemos concluir que: elétrons não são nem partículas clássicas, nem ondas mecânicas.



**Figura 5** – Representação do experimento de Young com partículas clássicas. Adaptado de [2].



**Figura 6** – Representação da intensidade observada no anteparo para  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  e  $\mathcal{P}_{12}$ . Adaptado de [2].

Podemos inferir o fator que: existe uma função de onda  $\psi(x)$ , tal que  $\psi_j$  é o valor quando só a fenda  $j$  está aberta, temos:

$$\mathcal{P}_1(x) = |\psi_1(x)|^2 \quad \mathcal{P}_2(x) = |\psi_2(x)|^2$$

$$\boxed{\mathcal{P}_{12}(x) = |\psi_1(x) + \psi_2(x)|^2}$$

Ou seja, a probabilidade de detectar o elétron com ambas fendas abertas é descrito como uma superposição de funções de ondas não observadas experimentalmente, chamadas de *amplitude de probabilidade* [2].

#### 2.1.4 Uma interpretação probabilística

Como visto anteriormente, a interpretação física de  $\psi(x)$  é como uma amplitude de probabilidade, sendo:

$$\boxed{\mathcal{P}_{12}(x)dx = |\psi(x)|^2 dx} \implies \text{Probabilidade de encontrar a partícula entre } x \text{ e } x + dx \text{ [2].}$$

Iremos considerar agora, discutindo ainda o experimento de Young com elétrons, observar por qual das duas fendas o elétron irá passar. Para isso, iremos iluminar as fendas com uma lâmpada e iremos aguardar e observar a luz espalhada pelo elétron. Ao espalhar a luz, é observado um “flash” e veremos por qual fenda o elétron passou. Para

esta análise, devemos ter em mente as seguintes modificações no experimento: é reduzida a intensidade do feixe de elétrons, fazendo assim com que passe apenas um elétron por vez por alguma das fendas, e também, que a luz da lâmpada seja suficientemente intensa para serem observados todos os elétrons (observar os flashes devido ao espalhamento) [2].

Por meio destas considerações podemos associar uma distribuição de probabilidade  $\mathcal{P}_1(x)$  de que o elétron passe pela fenda um e  $\mathcal{P}_2(x)$  a distribuição de probabilidade de que o elétron passe pela fenda dois. Nunca é observado flash provindo ao mesmo tempo da fenda um e dois devido à passagem do elétron [2]. Para  $\mathcal{P}_{12}(x)$ , temos:

$$\mathcal{P}_{12}(x) = \mathcal{P}_1(x) + \mathcal{P}_2(x) \longrightarrow \text{o que é observado na Figura 4}$$

Portanto, o ato de observarmos por qual fenda o elétron passa, destrói os padrões de interferência. O modo como observamos algo na escala microscópica afeta de forma drástica os resultados [2]. Em contrapartida, na escala macroscópica o processo de observar também causa perturbações nos resultados, como, por exemplo, os raios solares incidindo sobre um automóvel estacionado: houve perturbação, tanto que podemos levá-la em conta e reduzidas a um nível pequeno, porém não vemos nada de tão absurdo acontecendo com o automóvel.

A perturbação no nosso experimento pode ser reduzida da seguinte forma [2]: diminuindo a intensidade de luz, o que corresponde em diminuir o número de fótons incidentes por unidade de tempo e de área, não alterando a interação de cada fóton com o elétron. Em consequência, a probabilidade de que o elétron encontre o fóton e seja espalhado torna-se menor do que um (ou 100%), na qual foi anteriormente pressuposto que haveria um fóton espalhado para cada elétron, sendo assim a probabilidade sendo 1, 100% [2].

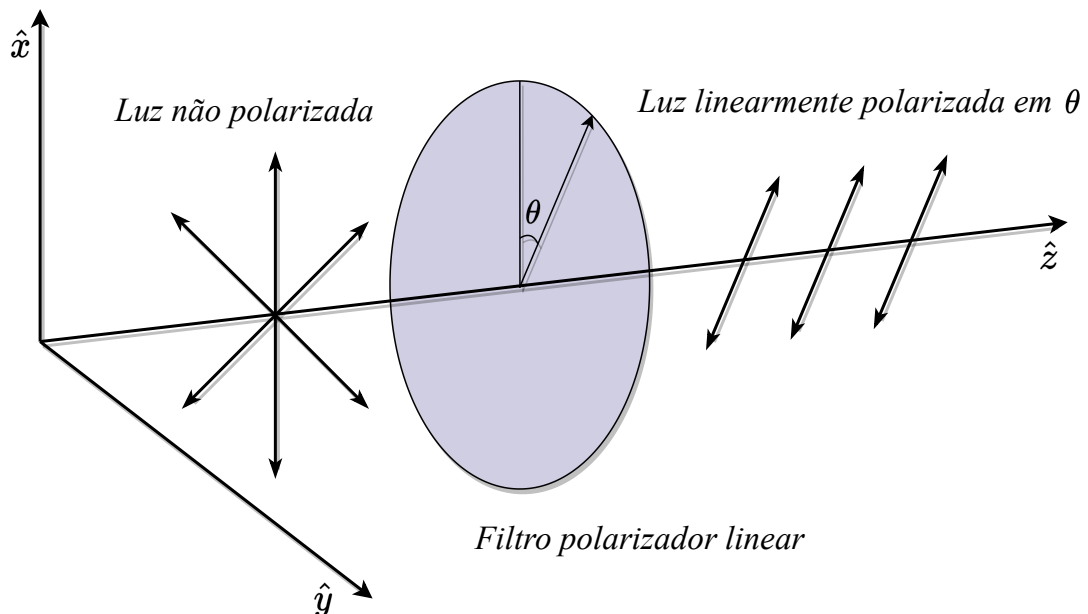
Para concluir esta análise, temos a seguinte proposição: amplitudes de probabilidade associada a duas possibilidades diferentes interferem quando não é possível saber qual das duas fendas foi observada, e não interferem quando é possível distingui-las. O processo de observação na escala atômica acaba influenciando no resultado observado. Na escala atômica é encontrado limitações às possibilidades de observação, sendo assim, objetos atômicos são “frágeis” e é necessário especificar de que forma estão sendo observados [2].

O limiar entre a escala microscópica e macroscópica é mediada pela constante de Planck  $h$ . Diz-se que uma ação é “grande” quando temos  $\gg h$ , tal condição necessária que nos aproxima do nível macroscópico [2].

## 2.2 POLARIZAÇÃO DA LUZ

A luz, sendo uma onda eletromagnética, é a combinação das oscilações de campo elétrico e magnético em um meio que oscilam perpendicularmente entre si e com uma direção de propagação. Você pode imaginar que o campo elétrico  $\vec{E}$  oscile na direção  $x$  e o campo magnético  $\vec{B}$  oscila na direção  $y$ . A direção  $z$  é a direção em que esta onda transversal se propaga.

É possível polarizar a luz usando filtros polaróides. Tal filtro contém moléculas muito longas e finas, todas orientadas em uma direção visando absorver a luz que incide em direção perpendicular a esta orientação [3]. A Figura 7 demonstra esse efeito de polarização.



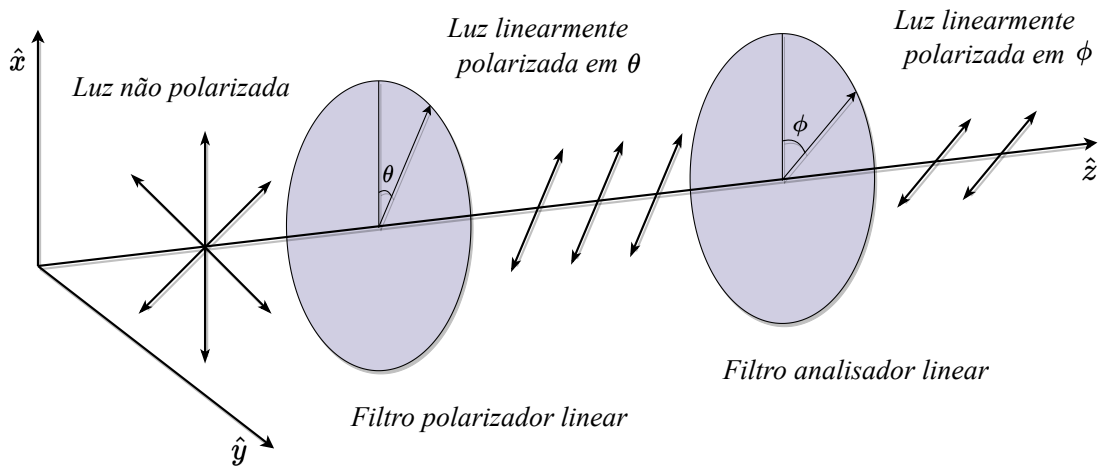
**Figura 7** – Efeito de polarização da luz. Produzido pelo autor.

A intensidade da onda transmitida será exatamente a metade da intensidade da onda incidente. Isso ocorre devido a que o vetor campo elétrico  $\vec{E}$  da luz incidente pode ser decomposto em componentes paralelos e perpendiculares ao eixo de polarização [4]. Portanto, somente a componente paralela ao eixo de polarização é transmitida, e a componente perpendicular é absorvida [4]. Logo:

$$I_{trans} = \frac{I_{inci}}{2}$$

Há também a possibilidade de utilizar um outro filtro, chamado de analisador, em sequência com o primeiro polarizador (veja Figura 8).





**Figura 8** – Utilização de um analisador em sequência do polarizador. Produzido pelo autor.

A intensidade da luz polarizada pelo analisador é dada pela Lei de Malus [4]:

$$I = I_0 \cos^2(\theta - \phi) \quad (4)$$

Onde  $\theta$  é o ângulo entre o eixo do polarizador com o eixo de polarização, e  $\phi$  o ângulo entre o eixo do polarizador e o eixo de polarização do analisador. Notamos que a intensidade  $I$ , transmitida através do analisador, será zero quando  $(\theta - \phi) = \pi/2$  e será máxima quando  $\theta = \phi$  (eixo de polarização do polarizador e do analisador estão em paralelo) [4].

Agora será descrita a matemática da polarização no eletromagnetismo clássico e aplicações em alguns casos particulares. Conforme mencionado, a luz é uma onda transversal oscilando no espaço e no tempo. O vetor campo elétrico desta onda é sempre perpendicular à direção de propagação, podendo ser escrita da seguinte forma [3]:

$$\vec{E}(z, t) = E_x(z, t)\hat{x} + E_y(z, t)\hat{y} \quad (5)$$

Onde  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  são os vetores unitários de  $x$  e  $y$ , respectivamente. Ainda:

$$E_x(z, t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \Phi_x) \quad (6)$$

$$E_y(z, t) = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \Phi_y) \quad (7)$$

Onde  $k$  corresponde ao número de onda, e  $\omega$  corresponde a frequência angular. Note que  $\vec{E}(z, t)$  é a combinação de duas ondas oscilantes (Eq. 6 e Eq. 7), de mesma frequência e velocidade, porém com fases ( $\Phi_x$  e  $\Phi_y$ ) que podem ser diferentes [3].

A Eq. 5 pode ser representada na sua forma complexa:

$$\vec{E}(z, t) = \text{Re} \left[ \left( E_{0x} \hat{x} + E_{0y} e^{i(\Phi_y - \Phi_x)} \hat{y} \right) e^{i(kz - \omega t + \Phi_x)} \right]$$

Sendo simplificado como [3]:

$$\vec{E}(z, t) = E \text{Re} \left( \vec{P} e^{i(kz - \omega t)} \right) \quad (8)$$

Onde definimos:

$$E = \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \quad a \equiv \frac{E_{0x}}{E} \quad b \equiv \frac{E_{0y}}{E} \quad \Phi = \Phi_y - \Phi_x$$

$$\vec{P} = a \hat{x} + b e^{i\Phi} \hat{y} \quad (9)$$

Em que definimos  $\Phi_x = 0$  escolhendo de forma adequada em  $t = 0$ . O vetor  $\vec{P}$  é chamado de vetor de polarização. O termo  $\Phi$  representa a diferença de fase entre  $\hat{y}$  e  $\hat{x}$  assumindo valores de intervalo de  $2\pi$  [3]. Além disso, podemos definir um ângulo de polarização  $\theta$ , de modo que:

$$a = \cos(\theta) \quad b = \sin(\theta)$$

Portanto, a Eq. 9 toma forma:

$$\vec{P}(\theta, \Phi) = \cos(\theta) \hat{x} + \sin(\theta) e^{i\Phi} \hat{y} \quad (10)$$

Tanto o vetor campo elétrico quanto o vetor polarização oscilam em um plano frontal que é perpendicular à direção de propagação (direção  $z$ , veja Figura 9) [3]. Para uma melhor compreensão de todo esse desenvolvimento, trabalharemos com a Eq. 8 e Eq. 10 com alguns casos particulares.

**I. Polarização linear:** considerando  $\Phi = 0$  e um valor de qualquer de  $\theta$ .

Da Eq. 10, temos:

$$\vec{P}(\theta, \Phi) = \cos(\theta) \hat{x} + \sin(\theta) \hat{y} \quad (11)$$

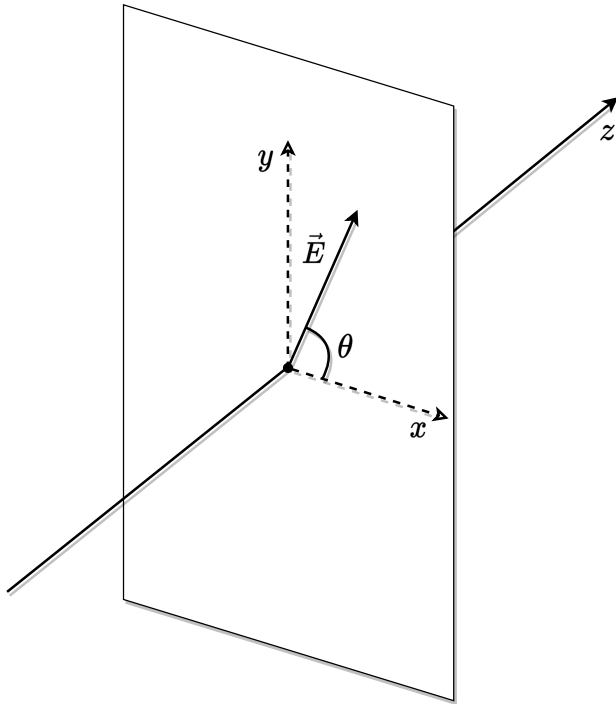
A Eq. 8:

$$\vec{E}(z, t) = E \cos(kz - \omega t) \vec{P} \quad (12)$$

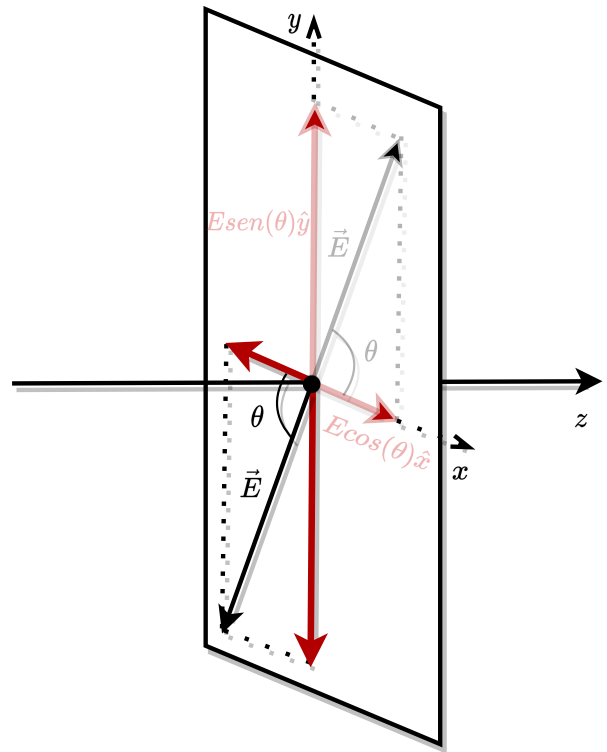
Ou ainda:

$$\vec{E}(z, t) = E \cos(kz - \omega t) [\cos(\theta) \hat{x} + \sin(\theta) \hat{y}]$$

$$\vec{E}(z, t) = \cos(kz - \omega t) [E \cos(\theta) \hat{x} + E \sin(\theta) \hat{y}]$$



**Figura 9** – Plano frontal perpendicular à direção de propagação  $z$ . Tanto o vetor campo elétrico quanto vetor polarização oscilam neste plano. Produzido pelo autor.



**Figura 10** – Plano frontal perpendicular à direção de propagação  $z$  com ângulo arbitrário. Note que  $\vec{E}$  oscila no plano. Produzido pelo autor.

Portanto, notamos que  $\vec{E}$  oscila de forma periódica com amplitude  $\pm E$  (o termo  $\cos(kz - \omega t)$  modula esta amplitude). A direção do campo elétrico dependerá do vetor de polarização (Figura 10 demonstra para um ângulo arbitrário). Vejamos alguns exemplos [3]:

I.i. Para  $\theta = 0$  e  $\Phi = 0$ .

Da Eq. 11:

$$\vec{P} = \hat{x}$$

E a Eq. 12:

$$\vec{E}(z, t) = E \cos(kz - \omega t) \hat{x}$$

A partir disso, temos o que chamamos de *polarização horizontal*, veja Figura 11. No nosso caso, definimos o eixo horizontal como o eixo  $x$ , em que o campo elétrico oscila de forma periódica com amplitude  $\pm E$  na direção  $\hat{x}$ .

I.ii. Para  $\theta = \pi/2$  e  $\Phi = 0$ .

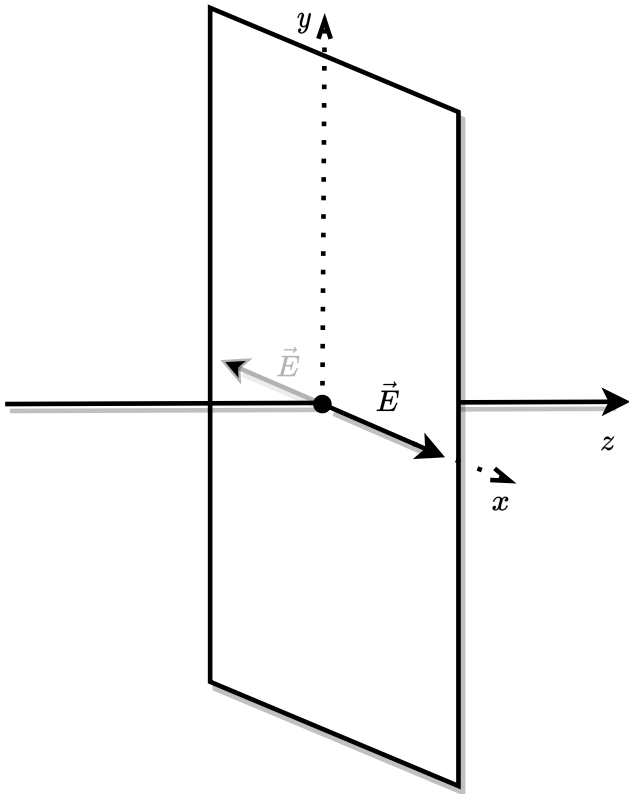
Da Eq. 11:

$$\vec{P} = \hat{y}$$

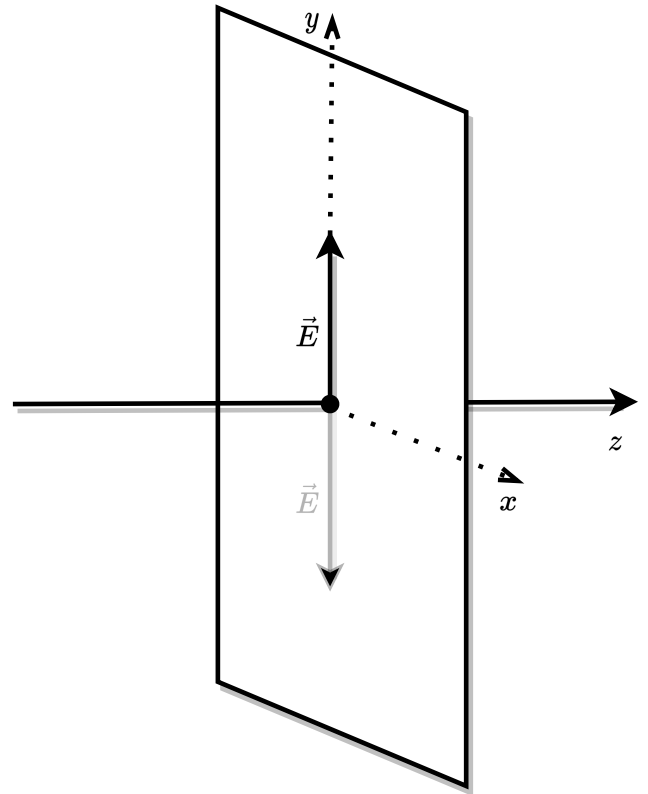
E a Eq. 12:

$$\vec{E}(z, t) = E \cos(kz - \omega t) \hat{y}$$

A partir disso, temos o que chamamos de *polarização vertical*, veja Figura 12. No nosso caso, definimos o eixo vertical como o eixo  $y$ ), em que o campo elétrico oscila de forma periódica com amplitude  $\pm E$  na direção  $\hat{y}$ .



**Figura 11** – Campo elétrico oscilando horizontalmente. Produzido pelo autor.



**Figura 12** – Campo elétrico oscilando verticalmente. Produzido pelo autor.

II. **Polarização Circular:** Considerando  $\Phi = \pm\pi/2$  e  $\theta = \pi/4$ .

Da Eq. 10:

$$\vec{P}(\theta, \Phi) = \cos(\pi/4) \hat{x} \pm \text{sen}(\pi/4) [\cos(\pi/2) + i \text{sen}(\pi/2)] \hat{y}$$

$$\vec{P}(\theta, \Phi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{x} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{y}$$

$$\vec{P}(\theta, \Phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} \pm i \hat{y}) \quad (13)$$

A Eq. 8:

$$\vec{E}(z, t) = E \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos(kz - \omega t) + i \operatorname{sen}(kz - \omega t)] (\hat{x} \pm i \hat{y}) \right\}$$

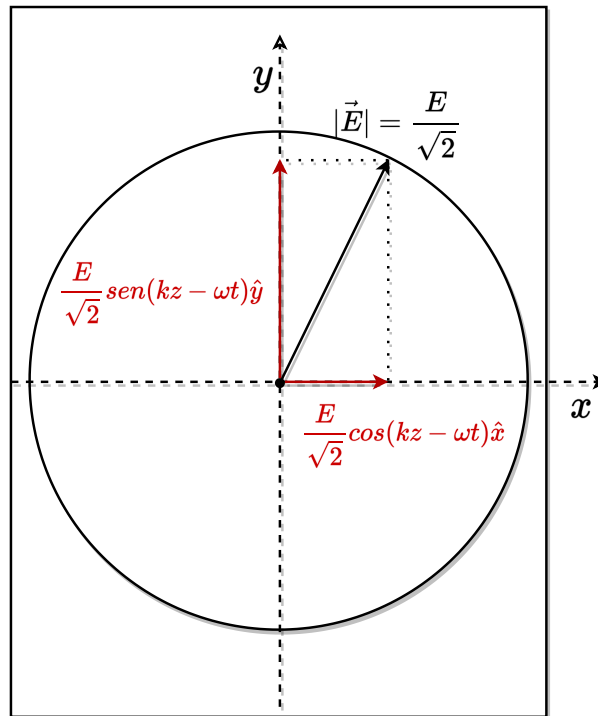
$$\vec{E}(z, t) = \frac{E}{\sqrt{2}} [\cos(kz - \omega t) \hat{x} \mp \operatorname{sen}(kz - \omega t) \hat{y}] \quad (14)$$

O vetor campo elétrico estará sempre localizado sobre um círculo de raio  $E/\sqrt{2}$ . Veja Figura 13. Este caso é conhecido como *polarização circular*, tendo o sentido de rotação horária quando  $\Phi = -\pi/2$  e rotação anti-horária quando  $\Phi = +\pi/2$ .

Para visualizar o sentido da rotação, da Eq. 14 considerando  $\Phi = +\pi/2$  e  $z = 0$  fixo, em um dado instante  $t$  tivermos ( $kz - \omega t = 0$ ), portanto:

$$\vec{E} = \frac{E}{\sqrt{2}} \hat{x}$$

De modo que no instante seguinte teremos uma componente positiva de  $y$ , pois a função seno é uma função ímpar [ou seja,  $-\operatorname{sen}(-u) = \operatorname{sen}(u)$ ] [3].



**Figura 13** – Vetor campo elétrico estará sempre localizado sobre um círculo de raio  $E/\sqrt{2}$ . Produzido pelo autor.

### 2.2.1 Decomposição da polarização em bases ortonormais

Caso ainda não tenha notado, mas a Eq. 13 é uma base ortonormal no espaço dos vetores polarização, podendo assim então serem utilizadas para representar os estados de polarização da luz. Como podemos verificar da Eq. 10, todos os vetores podem ser escritos como uma combinação linear de polarizações horizontais  $\hat{x}$  e verticais  $\hat{y}$  [3]. Denotando a Eq. 13 por:

$$\vec{P}_{\circlearrowleft} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{y}) \quad (15)$$

$$\vec{P}_{\circlearrowright} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{y}) \quad (16)$$

Diferentemente da literatura, que denota erroneamente como direção esquerda e direita a rotação de vetor polarização devido a fácil confusão, será denotado rotação horária do vetor polarização como  $\vec{P}_{\circlearrowleft}$  e anti-horária como  $\vec{P}_{\circlearrowright}$ .

Somando as Eq. 15 e 16, obtemos:

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{P}_{\circlearrowleft} + \vec{P}_{\circlearrowright}) \quad (17)$$

E subtraindo:

$$\hat{y} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\vec{P}_{\circlearrowleft} - \vec{P}_{\circlearrowright}) \quad (18)$$

O que podemos ver pela Eq. 17 e Eq. 18 é que qualquer vetor polarização também poderá ser considerado uma combinação de polarizações circulares!. Substituindo na Eq. 10, obtemos por fim:

$$\vec{P}(\theta, \Phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ [\cos(\theta) - i \operatorname{sen}(\theta) e^{i\Phi}] \vec{P}_{\circlearrowleft} + [\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta) e^{i\Phi}] \vec{P}_{\circlearrowright} \right\} \quad (19)$$

O que acabamos de realizar foi uma mudança de base no espaço dos vetores polarização. Saímos da base de polarização lineares  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  e passamos para a base de polarização circular  $\vec{P}_{\circlearrowleft}$  e  $\vec{P}_{\circlearrowright}$ . Vale notar que essas bases formam **espaço vetorial complexo** de duas dimensões [3].

Antes de adentrarmos no próximo tópico que corresponde à notação de Dirac, iremos introduzir agora uma definição de produto escalar complexo: vetores complexos compartilham uma grande maioria das propriedades dos reais, porém ao tratarmos de ortogonalidade entre vetores temos uma diferença [3].

Para o caso de vetores reais  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , temos a relação:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos(\Delta) \quad (20)$$

Onde  $\Delta$  corresponde ao menor ângulo entre os vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ . Devemos notar que: caso  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  seja igual a 0, então são ortogonais entre si.

Ao trabalhar com vetores complexos temos que seguir sua seguinte definição [3]:

**Definição 1** Dado dois vetores complexos  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  e  $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ , definimos o produto escalar complexo da seguinte forma:

$$\vec{v} \cdot_c \vec{w} \equiv \sum_{i=1}^n v_i^* w_i$$

O asterisco denota complexo conjugado de  $v_i$  e  $\cdot_c$  é usado para diferenciar do produto escalar real. Para a nossa segunda definição [3]:

**Definição 2** A norma de um vetor da forma usual é definida como:

$$\|\vec{v}\|^2 \equiv \vec{v} \cdot_c \vec{v} \geq 0$$

### 2.3 NOTAÇÃO DE DIRAC E FERRAMENTAL MATEMÁTICO BÁSICO

O objetivo desta seção é introduzir uma notação alternativa para o tratamento de fótons polarizados e se familiarizar com algumas representações matemáticas básicas que serão utilizadas no decorrer do texto.

A notação de Dirac é uma ferramenta fundamental na mecânica quântica para o desenvolvimento de estados quânticos, operadores e observáveis. Esta notação é uma ferramenta muito poderosa e elegante que simplifica muito os cálculos em mecânica quântica e é essencial para a compreensão dos conceitos da teoria quântica. Prosseguimos então com a notação alternativa.

A representação de um vetor  $\vec{v}$  usado anteriormente será agora substituído por um *ket*, nome dado por Dirac, definido da seguinte forma [3]:

$$|v\rangle \equiv \vec{v}$$

O vetor que obtemos quando tomamos o complexo conjugado de todos os elementos de  $|v\rangle$  é escrito como *bra*, e representado como [3]:

$$\langle v| \equiv v^*$$

Podemos também retomar o conceito de produto escalar complexo e escrevê-lo em nossa notação alternativa, que através da Eq. 20, temos:

$$\boxed{\vec{v} \cdot_c \vec{w} \equiv \sum_{i=1}^n v_i^* w_i = \langle v | \cdot | w \rangle \implies \langle v | w \rangle} \quad (21)$$

A expressão  $\langle v | w \rangle$  é chamado de *bracket*, ou seja, corresponde ao produto escalar complexo entre dois vetores [3].

Podemos colocar em nossa notação *braket* as propriedades [3]:

$$\vec{w} \cdot_c \vec{v} = (\vec{v} \cdot_c \vec{w})^* \implies \langle w | v \rangle = (\langle v | w \rangle)^*$$

$$\| \vec{v} \|^2 \equiv \vec{v} \cdot_c \vec{v} \geq 0 \implies \| |v\rangle \|^2 \equiv \langle v | v \rangle \geq 0$$

O vetor polarização e vetor campo elétrico são representados agora pelos *kets* [3]:

$$\vec{P}(\theta, \Phi) = \cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)e^{i\Phi}\hat{y} \implies |P(\theta, \Phi)\rangle = \cos(\theta)|x\rangle + \sin(\theta)e^{i\Phi}|y\rangle$$

$$\vec{E}(z, t) = E \operatorname{Re}(\vec{P}e^{i(kz - \omega t)}) \implies |E(z, t)\rangle = E \operatorname{Re}(|P\rangle e^{i(kz - \omega t)})$$

É necessário recapitular alguns resultados da álgebra linear com respeito a representação de operadores lineares por matrizes, desenvolvidas juntamente com a notação de Dirac.

Sabemos que uma matriz coluna pode ser representada como um vetor num espaço vetorial linear. Ou seja, um estado geral de polarização linear é representado por um vetor coluna [2]:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{vetor de dimensão 2}$$

$$\text{Onde } |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1 \longrightarrow \text{Condição de normalização}$$

Portanto, utilizando a notação de Dirac, temos a representação do vetor  $|c\rangle$ :

$$\boxed{|c\rangle = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}$$



Seu transposto complexo conjugado:

$$\langle c| = [c_1^* \quad c_2^*]$$

Podemos introdução uma base ortonormal  $|e_1\rangle$  e  $|e_2\rangle$ , tal que [2]:

$$\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij} \longrightarrow \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j & \longleftrightarrow \text{ Ortonormal} \\ 1 \text{ se } i = j & \longleftrightarrow \text{ Não ortonormal} \end{cases}$$

Onde  $\delta$  é chamado de *delta de Kronecker*. O leitor deve ter noção do significado da expressão anterior, e a relação de ortonormalidade entre as bases  $|e_i\rangle$  e  $|e_j\rangle$ . Com isto, qualquer vetor de estado  $|c\rangle$  pode ser representado como uma superposição dos vetores de base da seguinte forma [2]:

$$|c\rangle = c_1 |e_1\rangle + c_2 |e_2\rangle \quad (22)$$

Onde as bases  $|e_1\rangle$  e  $|e_2\rangle$  são representada por:

$$|e_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |e_2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Note que ao realizar o produto escalar complexo  $\langle e_1|c\rangle$  [2]:

$$\begin{aligned} \langle e_1|c\rangle &= \langle e_1|(c_1 |e_1\rangle + c_2 |e_2\rangle) \\ \langle e_1|c\rangle &= c_1 \underbrace{\langle e_1|e_1\rangle}_{\delta_{11}} + c_2 \underbrace{\langle e_1|e_2\rangle}_{\delta_{12}} \\ \langle e_1|c\rangle &= c_1 \end{aligned} \quad (23)$$

Usando as propriedades de que os produtos internos são distributivos e que escalares podem ser movidos livremente por meio de *bras* ou *kets* [5]. Da mesma forma, pode ser mostrado que  $\langle e_2|c\rangle = c_2$ .

## 2.4 ESTADOS DE POLARIZAÇÃO DA LUZ: TRATAMENTO UTILIZANDO FÓTONS POLARIZADOS

A partir de agora, iremos trabalhar com a polarização da luz no tratamento de fótons, em particular a polarização linear dos fótons. Relembrando, a polarização define a direção de oscilação do campo elétrico (veja Figura 7 e Figura 8). Dizemos que um sistema se encontra em um estado bem definido quando conhecemos a máxima informação possível a seu respeito. Ou seja, diremos que o estado quântico de polarização de fótons estará bem definido quando sabemos que ele é linearmente polarizado numa dada direção específica [2]. O polarizador prepara fótons em um estado de polarização  $\theta$  ou  $\phi$ . A partir do estudo sobre a difração de elétrons utilizando o experimento de Young da dupla fenda, temos à seguinte conclusão a respeito de fótons: a probabilidade de que um fóton preparado no estado de polarização linear  $\theta$  passe por um analisador que seleciona fótons de polarização linear  $\phi$  é [2]:

$$\mathcal{P}(\theta, \phi) = \cos^2(\theta - \phi)$$

Note que é totalmente plausível presumirmos isto, pois temos as seguintes relações [2]:

$\theta = \phi \Rightarrow \mathcal{P}(\theta, \phi) = 1 \Rightarrow$	100% de probabilidade que os fótons linearmente polarizados em $\theta$ passem pelo analisador linearmente polarizado em $\phi$ .
$\theta = \phi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathcal{P}(\theta, \phi) = 0 \Rightarrow$	0% de probabilidade que os fótons linearmente polarizados em $\theta$ passem pelo analisador linearmente polarizado em $\phi$ .

Não podemos prever com certeza o que acontece em termos intermediários (pois são probabilidades!).

Utilizando a Eq. 10 para polarização linear ( $\phi = 0$ ), introduzindo agora a notação de Dirac, identificamos que:

$$|\theta\rangle = \cos(\theta) |x\rangle + \sin(\theta) |y\rangle \quad (24)$$

Onde o vetor  $|\theta\rangle$  é representado por:

$$|\theta\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (25)$$

E as bases de polarização linear na direção  $|x\rangle$  e  $|y\rangle$ :

$$\boxed{|x\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |y\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad (26)$$

A Eq. 25 é o vetor de estado correspondente à polarização na direção  $\theta$  e a Eq. 24 é a representação do vetor de estado de polarização linear como uma superposição dos vetores de base! [2]. Para o mesmo caso, porém correspondente à polarização na direção  $\phi$ :

$$|\phi\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \text{sen}(\phi) \end{bmatrix} \quad (27)$$

Tomando o produto escalar complexo entre  $|\theta\rangle$  e  $|\phi\rangle$ :

$$\langle\phi|\theta\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} = \underbrace{\cos(\theta)\cos(\phi) + \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi)}_{\cos(\theta-\phi)}$$

$$\boxed{\langle\phi|\theta\rangle = \cos(\theta - \phi) \implies \text{amplitude de probabilidade}} \quad (28)$$

A Eq. 28 pode ser entendida como a amplitude de probabilidade de que o fóton com polarização  $|\theta\rangle$  passe em um analisador orientado com ângulo  $\phi$  [2]. Conforme visto anteriormente, ao tomar o módulo quadrado desta amplitude de probabilidade, encontramos a probabilidade de que o fóton passe:

$$\boxed{\mathcal{P}(\theta, \phi) = |\langle\phi|\theta\rangle|^2}$$

Para um fóton preparado em um estado de polarização qualquer podemos apenas prever a probabilidade de que passe pelo analisador [2]. Assim, aqui inferimos os dois primeiros postulados da mecânica quântica, associados a polarização do fóton [2]:

**Postulado 1** *O estado quântico de polarização de um fóton é representado pelo vetor de estado normalizado:*

$$|c\rangle = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \text{Com } \| |c\rangle \|^2 = |c_1|^2 + |c_2|^2 = \langle c|c\rangle = 1$$

**Postulado 2** *A probabilidade de um fóton inicialmente preparado em um estado de polarização qualquer  $|a\rangle$  seja observado com polarização  $|b\rangle$  numa observação binária é:*

$$\mathcal{P}(b, a) = |\langle b|a\rangle|^2$$

## 2.5 OPERADORES E OBSERVÁVEIS

Que grandezas são observáveis na física quântica? Uma grandeza que pode ser medida como a polarização linear do fóton em uma dada direção é um observável, assim como a energia deste fóton, onde o resultado pode ser qualquer número real maior que zero. Porém, existe uma condição necessária de observação: o resultado da observação seja um número real [2].

Nos limitaremos aqui a uma dada grandeza  $A$  na qual pode tomar um número finito de valores: os resultados da observação de  $A$  podem ser apenas os números reais  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Além disto, iremos supor que exista apenas um só estado quântico  $|c_j\rangle$  na qual a grandeza  $A$  toma os valores  $\lambda_j$ , com  $(j = 1, 2, \dots, n)$ .

Caso um fóton seja preparado em um estado  $|c_j\rangle$ , a probabilidade de que a medida de  $A$  produza o resultado  $\lambda_k$  (que o fóton seja observado no estado  $|c_k\rangle$ ) será:

$$|\langle c_k|c_j\rangle|^2 = \delta_{kj}$$

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 0 \text{ se } k \neq j & \longleftrightarrow \text{ 0\% de probabilidade que seja produzido o resultado } \lambda_k. \\ 1 \text{ se } k = j & \longleftrightarrow \text{ 100\% de probabilidade que seja produzido o resultado } \lambda_k. \end{cases}$$

Ou seja, trata-se de uma observação binária [2]: para o fóton preparado no estado  $c_j$ , a probabilidade de produzir o resultado  $\lambda_k$  será 100% apenas se  $j = k$ . Consequentemente, caso  $j \neq k$ , a probabilidade será 0. Na álgebra linear, em um espaço vetorial de dimensão  $m$ , não há possibilidade de existir mais de  $m$  vetores ortonormais. Foi visto também que, para os vetores de estado associados à polarização, temos  $m = 2$  [2].

Logo, no conjunto de estados quânticos associados à polarização do fóton, nenhuma grandeza observável pode tomar mais que dois valores diferentes. Ou seja, a dimensão do espaço dos estados representa o número máximo de valores que uma grandeza observável neste estado pode tomar [2].

Estes observáveis  $\hat{A}$  quando atuam em um vetor de estado  $c_j$ , podem transformar este estado [5]:

$$\hat{A}|c_j\rangle = |\alpha\rangle \quad (j = 1, 2) \quad (29)$$

$$|\alpha\rangle = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Sendo que em alguns casos ele não altera o *ket*, exceto por uma constante:

$$\hat{A}|c_j\rangle = \lambda_j |c_j\rangle \quad (j = 1, 2) \quad (30)$$

O que exprime dizendo que  $|c_j\rangle$  é um *autovetor* de  $\hat{A}$  associado ao *autovalor*  $\lambda_j$ . A partir disso, inferimos mais dois postulados [5]:

**Postulado 3** *Um observável é representado matematicamente por um operador hermitiano  $\hat{A}$ .*

**Postulado 4** *O único resultado possível (de uma medida) é um do seus autovalores  $\lambda$  do operador  $\hat{A}$ .*

Onde, como um complemento ao Postulado 4 à polarização, temos [2]:

**Postulado 4.1** *Os estados de polarização para os quais  $\hat{A}$  assume com certeza seus valores possíveis ( $\lambda_1, \lambda_2$ ) são os autovetores (também chamados de autoestados) correspondentes a  $\hat{A}$ .*

A necessidade de deixar explícito a palavra *hermitiano* será explicado na seção 2.5.2.

### 2.5.1 Representação matricial de $\hat{A}$

Como estamos trabalhando com polarização de fótons de dimensão dois, a matriz de  $\hat{A}$  será uma matriz quadrada  $2 \times 2$ :

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Ao atuarmos  $\hat{A}$  nos vetores de base da polarização (Eq. 26):

$$\hat{A}|\hat{x}\rangle = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \implies \hat{A}|\hat{x}\rangle = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$$

Caso atuamos  $\langle\hat{x}|$  ambos os lados:

$$\langle\hat{x}|\hat{A}|\hat{x}\rangle = [1 \ 0] \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = a_{11} \implies \boxed{\langle\hat{x}|\hat{A}|\hat{x}\rangle = a_{11}}$$

Da mesma forma:

$$\langle\hat{y}|\hat{A}|\hat{y}\rangle = [0 \ 1] \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = a_{22} \implies \boxed{\langle\hat{y}|\hat{A}|\hat{y}\rangle = a_{22}}$$

$$\langle\hat{x}|\hat{A}|\hat{y}\rangle = [1 \ 0] \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = a_{12} \implies \boxed{\langle\hat{x}|\hat{A}|\hat{y}\rangle = a_{12}}$$

$$\langle\hat{y}|\hat{A}|\hat{x}\rangle = [0 \ 1] \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = a_{21} \implies \boxed{\langle\hat{y}|\hat{A}|\hat{x}\rangle = a_{21}}$$

Portanto, nesta base, o operador  $\hat{A}$  tem a seguinte representação:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \langle\hat{x}|\hat{A}|\hat{x}\rangle & \langle\hat{x}|\hat{A}|\hat{y}\rangle \\ \langle\hat{y}|\hat{A}|\hat{x}\rangle & \langle\hat{y}|\hat{A}|\hat{y}\rangle \end{bmatrix} \quad (32)$$

Portanto, um elemento individual, como  $\langle x|\hat{A}|x\rangle$ , geralmente é referido como um elemento de matriz [5]. Esse “sanduíche” formado por um *bra*, um operador e um *ket* desempenha um papel importante em muitos cálculos da mecânica quântica, mesmo em casos em que o *bra* e o *ket* não são *kets* de base [5].

## 2.5.2 Observáveis hermitianos

Da Eq. 31, ao transpormos as linhas e colunas e tomando o complexo conjugado, chama-se então  $A^\dagger$  a **matriz conjugada hermitiana** de  $\hat{A}$ , ou **matriz adjunta** de  $\hat{A}$  [2]:

$$A^\dagger = [\hat{A}^T]^* = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{bmatrix} \quad (33)$$

Da Eq. 29:

$$\hat{A}|c\rangle = |\alpha\rangle \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} c_1 + a_{12} c_2 \\ a_{21} c_1 + a_{22} c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = |\alpha\rangle$$

Se realizarmos agora o *bra* de  $|\alpha\rangle$ , ou seja,  $\langle\alpha|$ :

$$\begin{bmatrix} a_{11}^* c_1^* + a_{12}^* c_2^* & a_{21}^* c_1^* + a_{22}^* c_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^* & \alpha_2^* \end{bmatrix} = \langle\alpha|$$

Que é exatamente igual a:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c_1^* & c_2^* \end{bmatrix}}_{\langle c|} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{bmatrix}}_{A^\dagger} = \langle\alpha|$$

$$\langle c|A^\dagger = \langle\alpha| \quad (34)$$

Logo, será válido [5]:

$$\begin{aligned} \hat{A}|c\rangle = |\alpha\rangle &\implies \langle c|A^\dagger = \langle\alpha| \\ \hat{A}|c\rangle = \lambda|c\rangle &\implies \langle c|A^\dagger = \langle c|\lambda^* \end{aligned}$$

Assim, um operador é hermitiano se:

$$\boxed{\hat{A} = A^\dagger}$$

Onde todos os operadores que correspondem a observáveis são hermitianos. A prova disso vem logo em seguida [5]:

$$\begin{aligned} \hat{A}|c\rangle &= \lambda|c\rangle & \langle c|A^\dagger &= \langle c|\lambda^* \\ \langle c|\hat{A}|c\rangle &= \lambda \underbrace{\langle c|c\rangle}_{=1} & \langle c|A^\dagger|c\rangle &= \lambda^* \underbrace{\langle c|c\rangle}_{=1} \\ \langle c|\hat{A}|c\rangle &= \lambda & \langle c|A^\dagger|c\rangle &= \lambda^* \end{aligned}$$

Se  $\hat{A} = A^\dagger$ , temos que:

$$\boxed{\lambda = \lambda^* \implies \lambda \text{ é real}}$$

Aqui vemos a necessidade de que os operadores que representam observáveis serem hermitianos, que, conforme dito, é condição necessária que os resultados da observação de  $\hat{A}$  sejam um número real.

## 2.6 O OPERADOR PROJEÇÃO

Um operador de grande importância é o chamado *operador projeção*, podendo obter novas relações com este operador. Portanto, da Eq. 25:

$$|\theta\rangle = \cos(\theta) |x\rangle + \sin(\theta) |y\rangle$$

Sabendo da relação da Eq. 23:

$$|\theta\rangle = \underbrace{\langle x|\theta\rangle}_{\cos(\theta)} |x\rangle + \underbrace{\langle y|\theta\rangle}_{\sin(\theta)} |y\rangle$$

Como  $\langle x|\theta\rangle$  e  $\langle y|\theta\rangle$  são números, podemos alterar sua ordem:

$$|\theta\rangle = |x\rangle \langle x|\theta\rangle + |y\rangle \langle y|\theta\rangle$$

$$|\theta\rangle = (|x\rangle \langle x| + |y\rangle \langle y|) |\theta\rangle$$

Definimos então [5]:

$$\boxed{\hat{\Pi}_x = |x\rangle \langle x| \quad \hat{\Pi}_y = |y\rangle \langle y|} \implies \text{Operadores de projeção} \quad (35)$$

Logo:

$$|\theta\rangle = (\hat{\Pi}_x + \hat{\Pi}_y) |\theta\rangle \quad (36)$$

Note que a  $|\theta\rangle$  da Eq. 36 possui uma igualdade a menos do termo  $(\hat{\Pi}_x + \hat{\Pi}_y)$ . Vejamos do que se trata deste termo.

Sabendo da Eq. 26:

$$\hat{\Pi}_x = |x\rangle \langle x| = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{\hat{\Pi}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\hat{\Pi}_y = |y\rangle \langle y| = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{\hat{\Pi}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$



Portanto:

$$\hat{\Pi}_x + \hat{\Pi}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\hat{\Pi}_x + \hat{\Pi}_y = \hat{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad (37)$$

Logo, a relação anterior é chamada de *relação de completude* e o operador  $\hat{I}$  é chamado de *operador identidade* [5]. Assim, isso expressa o fato de que os estados de base  $|x\rangle$  e  $|y\rangle$  formam um conjunto completo de estados, o que significa que qualquer *ket* arbitrário pode ser escrito em termos deles [5] (não necessariamente é preciso utilizar vetores de base, mas qualquer vetor que satisfaça a relação).

O operador identidade atuando em qualquer *ket* não altera o estado [2] (veja a Eq. 36). A Eq. 37 pode ser escrita da forma geral para a polarização [2]:

$$\boxed{\sum_{j=1}^2 \hat{\Pi}_j = \sum_{j=1}^2 |e_j\rangle \langle e_j| = \hat{I}}$$

## 2.7 O VALOR MÉDIO

Em um estado de polarização  $|c\rangle$  qualquer, a grandeza  $A$  não tomará em geral um valor definido (a menos de uma medida projetiva): isto acontecerá apenas nos estados  $|\alpha_j\rangle$ . De forma geral,  $A$  tomara um de seus dois valores possíveis  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$  em cada observação e, terá probabilidades  $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$  que é dada Postulado 2 para cada valores, ou seja [2]:

$\mathcal{P}_1 =  \langle \alpha_1   c \rangle ^2 \implies$	Probabilidade associada a obter o valor $\lambda_1$ na qual foi preparado no estado $c$ .
$\mathcal{P}_2 =  \langle \alpha_2   c \rangle ^2 \implies$	Probabilidade associada a obter o valor $\lambda_2$ na qual foi preparado no estado $c$ .

A definição de valor médio da grandeza  $\hat{A}$  no estado  $|c\rangle$  é dado como [2]:

$$\boxed{\langle \hat{A} \rangle_c \equiv \sum_{j=1}^{n=2} \lambda_j \mathcal{P}_j} \quad (38)$$

A média prevista deste valor é comumente chamada de *valor esperado*, mas não é o valor esperado de qualquer experimento único. Em vez disso, é o valor médio esperado

de um grande número de experimentos [5]. Sabendo das relações anteriores, a Eq. 38 torna-se:

$$\begin{aligned}\langle \hat{A} \rangle_c &= \sum_{j=1}^{n=2} \lambda_j |\langle \alpha_j | c \rangle|^2 \\ \langle \hat{A} \rangle_c &= \sum_{j=1}^{n=2} \lambda_j \langle \alpha_j | c \rangle \langle \alpha_j | c \rangle^* \\ \langle \hat{A} \rangle_c &= \sum_{j=1}^{n=2} \lambda_j \langle c | \alpha_j \rangle \langle \alpha_j | c \rangle\end{aligned}$$

E da relação de completeza:

$$\boxed{\langle \hat{A} \rangle_c = \langle c | \hat{A} | c \rangle} \quad (39)$$

Onde o operador  $\hat{A}$  pode ser representado também como [2]:

$$\boxed{\hat{A} \equiv \sum_{j=1}^{n=2} \lambda_j \hat{\Pi}_j \quad \hat{\Pi}_j = |\alpha_j \rangle \langle \alpha_j|}$$

Conforme dito, os vetores de estado do operador projeção não necessariamente precisam ser vetores de base, mas vetores que satisfaça a relação de completeza.

## 2.8 COMPUTAÇÃO CLÁSSICA: UMA REVISÃO

Os computadores percorreram um extenso caminho para chegar no que conhecemos até hoje. Os primeiros computadores não eram máquinas, mas sim, humanos, com objetivo de realizar cálculos [6]. O termo “computador” remonta ao início dos anos 1600, séculos antes da era digital. Os computadores humanos persistiram até a história moderna, com a NASA, por exemplo, empregando pessoas para calcular trajetórias de lançamento para o programa espacial e outras empreitadas científicas até a década de 1960 [6]. Agora, quase todo mundo tem um computador eletrônico no bolso, como um *smartphone*, por exemplo, que é mais poderoso do que os computadores que levaram pessoas à lua.

Os computadores quânticos estão onde os computadores clássicos estavam décadas atrás. Para entender o funcionamento dos computadores quânticos, é útil entender os funcionamentos dos computadores regulares, clássicos, como os bits e portas lógicas [6].

Portanto, este t3pico ser3 destinado a entender o b3sico da computa33o cl3ssica, de forma que ser3 de forma an3loga para a computa33o qu4ntica em cap3tulos posteriores.

### 2.8.1 Bits

O que 3 um bit? O que ele representa? Por que ele 3 importante para a computa33o? A discuss3o ser3 iniciada apresentando dois exemplos: moedas e dados.

Iniciando com as moedas, considere uma moeda hipot3tica que pode representar dois estados poss3veis quando jogada aleatoriamente sobre uma superf3cie: cara (C) ou coroa (C'), conforme a Figura 14. Suponha tamb3m que as moedas n3o se equilibram nas bordas, ou seja, os estados poss3veis ser3o sempre C ou C'. Se tivermos duas moedas, existem quatro estados poss3veis: ambas as moedas podem estar com a face para cima (CC), a primeira pode estar com a face para cima e a segunda com a face para baixo (CC'), a primeira pode estar com a face para baixo e a segunda com a face para cima (C'C), ou ambas podem estar com a face para baixo (C'C'). Em resumo, os estados poss3veis s3o [6]:

$$CC,CC',C'C,C'C'$$

Uma vez que a primeira moeda possui dois estados poss3veis, assim como a segunda moeda, h3 ent3o  $2 \times 2 = 2^2 = 4$  estados poss3veis para duas moedas [6]. Para tr3s moedas, podemos listar seus poss3veis estados:

$$CCC,CCC',CC'C,CC'C',C'CC,C'CC',C'C'C,C'C'C'$$

Uma vez que temos tr3s moedas, cada uma contendo dois estados, o n3mero de estados poss3veis ser3  $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ . De forma geral, se tivermos  $n$  moedas, ent3o haver3  $2^n$  poss3veis estados [6].

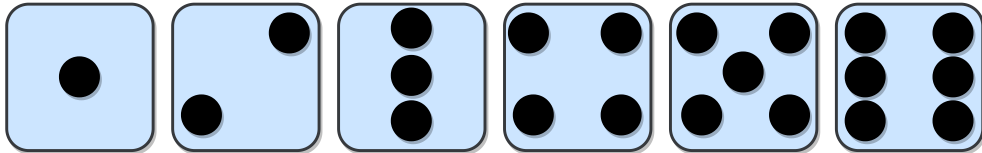


**Figura 14** – Representa33o de uma moeda hipot3tica contendo face cara (C) e face coroa (C'). Produzido pelo autor.

Utilizando dados, considere um dado padrão contendo seis lados, conforme a Figura 15, onde em uma jogada ele possui seis estados possíveis: 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Utilizando dois dados, cada um pode assumir valores de 1 a 6, então ambos podem ser 1, o primeiro pode ser 1 e o segundo pode ser 2, e assim por diante. Se o primeiro dado for 3 e o segundo for 5, vamos escrever essa configuração como (3,5) [6]. A configuração total pode ser:

(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)  
 (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)  
 (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)  
 (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)  
 (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)  
 (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)

Logo, utilizando dois dados, teremos  $6 \times 6 = 6^2 = 36$  estados possíveis. De forma geral, teremos  $6^n$  possíveis estados, onde  $n$  corresponde ao número de dados. Vemos, portanto, a quantidade de estados possíveis presentes utilizando moedas e dados. A questão é: quanta informação as moedas e dados podem carregar? Veremos logo em seguida.



**Figura 15** – Representação das seis faces de um dado. Produzido pelo autor.

### 2.8.2 Codificando informações

As sete cores do arco-íris podem ser representadas, ou codificadas, através das configurações possíveis utilizando três moedas e dois dados, conforme a Tabela 1. Portanto, em uma jogada com três moedas, correspondendo a C'CC, é possível então decodificar esse estado e encontrar a cor azul. Da mesma forma, com os dois dados, caso o primeiro corresponda a 1 e o segundo a 5, temos o estado (1,5), que decodificado também representa a cor azul.

**Tabela 1** – Representação das cores do arco-íris associadas aos possíveis estados de três moedas e dois dados. Adaptado de [6].

Cores	Moedas (estados)	Dados (estados)
Vermelho	CCC	(1,1)
Laranja	CCC'	(1,2)
Amarelo	CC'C	(1,3)
Verde	CC'C'	(1,4)
Azul	C'CC	(1,5)
Indigo	CCC'	(1,6)
Violeta	C'C'C	(2,1)

Nós vemos que uma moeda carrega menos informação do que um dado: são necessárias três moedas para distinguir as sete cores do arco-íris, em comparação com dois dados [6]. Uma vez que dois estados é o menor número de estados que podem ser distinguíveis, uma moeda carrega a menor quantidade de informação possível. Portanto, temos a ideia de que algo com dois estados carrega a menor quantidade de informação possível [6]. Há muitos sistemas físicos que possuem dois estados. Como foi discutido anteriormente, o exemplo da moeda possuir cara e coroa é um sistema de dois estados. Em vez de usar tantos nomes diferentes, muitas vezes é mais fácil usar nomes genéricos para os dois estados. De forma matemática, é conveniente utilizar dígitos binários para estas representações. A Tabela 2 apresenta alguns exemplos possíveis para sistemas de dois estados e a representação geral que pode ser utilizada, a do dígito binário [6].

**Tabela 2** – Exemplo de sistemas de dois estados. Adaptado de [6].

Sistema Físico	Estados
Moeda	C C'
Interruptor	Ligado Desligado
Tensão	0 V 5 V
Polarização	Passa Não passa
Dígito Binário	0 1

Note que a polarização linear de fótons, vista anteriormente, pode ser reduzida a um sistema de dois estados! Agora, utilizando a convenção de dígitos binários, independente de qualquer sistema físico, podemos nos referir aos dois estados possíveis como 0 e 1, a convenção binária [6].

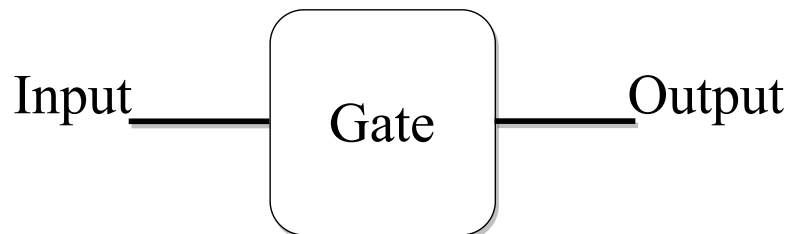
Portanto, uma vez que os dígitos binários são frequentemente usados na computação, uma abreviação para *dígito binário* foi inventada: o bit. Logo, uma vez que sistemas com dois estados carregam a menor quantidade de informação possível, o bit também carregará a menor quantidade de informação possível [6].

### 2.8.3 Portas Lógicas

Nesta subseção iremos explorar como é possível manipular os bits anteriormente estudados para que possamos realizar cálculos utilizando-os. Para que possamos manipulá-los, devemos utilizar as *portas lógicas* (*logic gates*), na qual consiste em receber ou mais bits como entrada (*input*) e, a depender da entrada, terá uma saída (*output*) com um ou mais bits [6]. Ao fim, será apresentado um exemplo físico utilizando um bit.

#### 2.8.3.1 Portas de um único bit

Um simples circuito de uma porta lógica contendo *input* e *output* de um bit pode ser representado pela Figura 16.



**Figura 16** – Representação de um diagrama de circuito para um único bit. Produzido pelo autor.

O circuito é lido da esquerda para a direita. O bit de entrada da esquerda viaja através de uma linha ou fio até a porta, na qual foi desenhada de uma forma genérica. O bit sai pela porta pela direita, através do fio, na qual se tem o bit de saída [6].

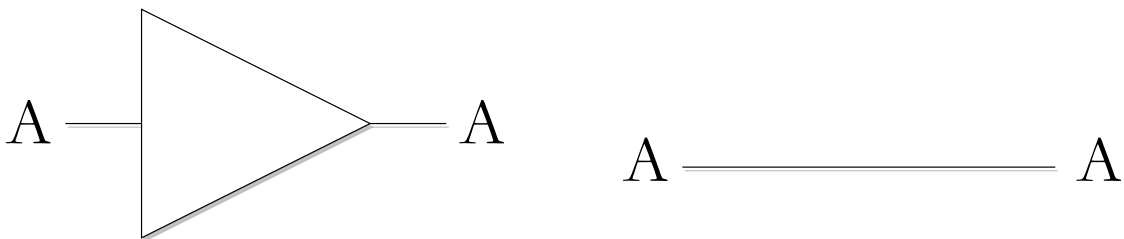
Podemos descrever as possibilidades de saída do bit utilizando uma *tabela verdade*, veja Tabela 3. Como tem apenas um bit, sua possibilidade de entrada será apenas 0 ou 1 [6].

**Tabela 3** – Exemplo de tabela verdade para um bit. Como não especificamos a porta utilizada, o bit de saída está com interrogação.

Input	Output
0	?
1	?

O bit de saída dependerá da porta utilizada. Como temos dois bits de saída, cada um contendo dois estados possíveis, 0 ou 1, teremos  $2 \times 2 = 4$  possibilidades de portas lógicas [6]. Quais as portas possíveis para se utilizar para um bit? As portas serão listadas logo em seguida.

- I. **A porta identidade:** Porta na qual não realiza nenhuma alteração no bit. Para bit de entrada 0, sua saída será 0, o mesmo para o bit de entrada 1 [6]. É frequentemente representada por um triângulo, conforme Figura 17.



**Figura 17** – Representação esquemática da porta identidade. Como esta porta não altera o bit de entrada  $A$ , teremos  $A$  como bit de saída. Produzido pelo autor.

**Figura 18** – Representação alternativa da porta identidade. Produzido pelo autor.

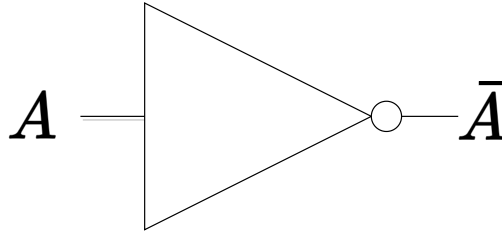
Na Figura 17, descrevemos  $A$  como bit de entrada. Como este bit passou pela porta identidade, na qual não fez alteração alguma, sua saída será  $A$  [6]. A tabela verdade para esta porta é descrita pela Tabela 4.

**Tabela 4** – Tabela verdade da porta identidade.

A	A
0	0
1	1

Como não foi realizada nenhuma alteração no bit, uma representação alternativa do circuito pode ser observada na Figura 18.

II. **A porta *NOT*:** Porta na qual inverte o bit de entrada. Caso o bit de entrada corresponda a 1, o bit de saída corresponderá a 0. Da mesma forma com bit de entrada 0 [6]. Seu diagrama de circuito é representado pela Figura 19.



**Figura 19** – Representação da porta *NOT*. Produzida pelo autor.

O bit de entrada  $A$  entra na porta *NOT* pela esquerda e o resultado de saída será  $\bar{A}$ . A barra acima do bit denota negação, ou seja, o bit invertido ou a negação do bit [6]. A tabela verdade para esta porta é observada na Tabela 5.

**Tabela 5** – Tabela verdade da porta *NOT*.

$A$	$\bar{A}$
1	0
0	1

III. **A porta *always 0*:** Porta responsável por, independente do bit de entrada, terá seu bit de saída *sempre* 0 [6]. Não possui um diagrama de circuito padrão, porém por ser representado através da tabela verdade conforme Tabela 6.

**Tabela 6** – Tabela verdade da porta *always 0*.

$A$	0
1	0
0	0

IV. **A porta *always 1*:** Assim como *always 0*, esta porta é responsável por, independente do bit de entrada, terá seu bit de saída *sempre* 1 [6]. Não possui um diagrama de circuito padrão, porém por ser representado através da tabela verdade conforme Tabela 7.



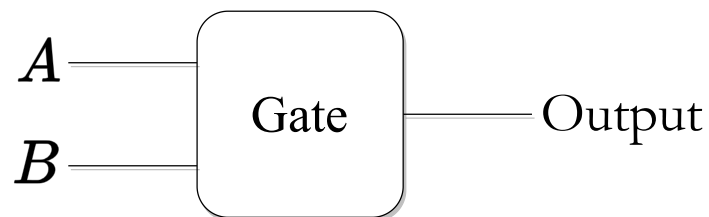
**Tabela 7** – Tabela verdade da porta *always 1*.

$A$	1
0	1
1	1

Estas são todas as possibilidades de manipulação de apenas um bit de entrada e um bit de saída.

### 2.8.3.2 Portas para dois bits

São portas lógicas que utilizam dois bits de entrada, como por exemplo  $A$  e  $B$ . As portas lógicas de dois bits podem ter várias saídas, o caso mais simples onde temos apenas uma saída é representada de forma geral pela Figura 20.

**Figura 20** – Representação de um diagrama de circuito para dois bit de entrada. Produzida pelo autor.

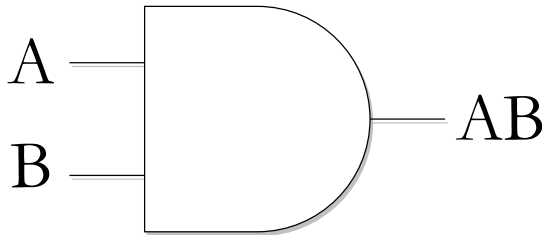
A tabela verdade para dois bits terá  $2 \times 2 = 2^2 = 4$  possibilidades de entrada. Ou seja,  $A$  e  $B$  podem ambos ser 0, ou  $A$  sendo 1 e  $B$  0,  $A$  correspondendo a 0 e  $B$  1, ou ambos ser 1. De forma geral, e simplificada: 00, 01 10, 11. A tabela tabela verdade para dois bits de entrada é observado na Tabela 8.

**Tabela 8** – Exemplo de tabela verdade para dois bits. Novamente, como não especificamos a porta utilizada, os bits de saída estão com interrogação.

A	B	Output
0	0	?
0	1	?
1	0	?
1	1	?

Novamente, o bit de saída dependerá da porta utilizada. Uma vez que temos quatro bits de saída, sendo 0 ou 1 as possibilidades, temos  $2^4 = 16$  possibilidades de portas para dois bits [6]. Porém, serão listadas apenas 5 de grande importância.

- I. **A porta AND:** O bit de saída será 1 apenas quando ambos os bits de entrada forem 1 [6]. Sua representação pode ser observada na Figura 21.



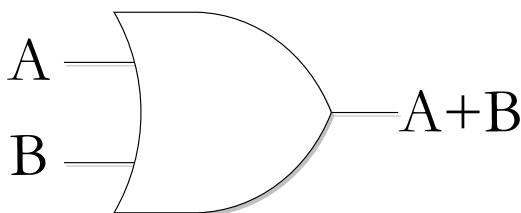
**Tabela 9** – Tabela verdade da porta AND.

A	B	AB
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

**Figura 21** – Representação de um diagrama de circuito para a porta AND. Produzida pelo autor.

Os bits de entrada  $A$  e  $B$  entram na porta AND, resultando em  $AB$ . A tabela verdade para esta porta lógica é representada pela Tabela 9. Note que a multiplicação usual funciona muito bem aqui:  $0 \times 0 = 0 \times 1 = 1 \times 0 = 0$  e apenas  $1 \times 1 = 1$ . Em alguns textos, você pode se deparar com a notação  $A \wedge B$ , na qual é equivalente a  $AB$  [6].

- II. **A porta OR:** O bit de saída será 1 se pelo menos um bit de entrada, ou ambos corresponder a 1 [6]. Sua representação pode ser observada na Figura 22.



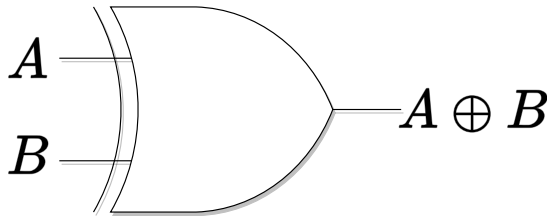
**Tabela 10** – Tabela verdade da porta OR

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

**Figura 22** – Representação de um diagrama de circuito para a porta OR. Produzida pelo autor.

Os bits de entrada  $A$  e  $B$  entram na porta OR, resultando em  $A+B$ . A tabela verdade para esta porta lógica é representada pela Tabela 10. Diferente da porta AND,  $A+B$  não indica adição literal dos bits, é apenas uma representação. Em alguns textos, você pode se deparar com a notação  $A \vee B$ , na qual é equivalente a  $A+B$  [6].

III. A porta *Exclusive OR* ou *XOR*: O bit de saída será 1 apenas se um bit de entrada for 1, mas não ambos [6]. Sua representação pode ser observada na Figura 23.



**Tabela 11** – Tabela verdade da porta *XOR*.

$A$	$B$	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

**Figura 23** – Representação de um diagrama de circuito para a porta *XOR*. Produzida pelo autor.

Os bits de entrada  $A$  e  $B$  entram na porta *XOR*, resultando em  $A \oplus B$ . A tabela verdade para esta porta lógica é representada pela Tabela 11 [6]. Aqui,  $\oplus$  corresponde a soma módulo dois, significando que pegamos o resto após dividir por 2.

Por exemplo:

$$A \oplus B = 1$$

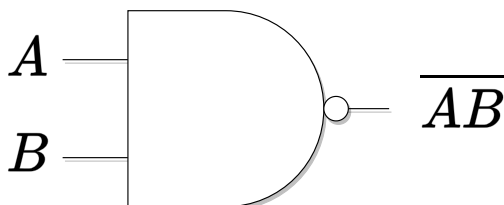
$$1 \oplus 0 = 1$$

$$\underbrace{1}_{\text{dividendo}} = \underbrace{1}_{\text{resto}} \text{ mod } \underbrace{2}_{\text{divisor}}$$

Ou seja, 1 dividido por 2 resulta em um quociente 0, com resto 1. De forma geral, para este exemplo:

$$A \oplus B = 1 \oplus 0 = 1 \equiv 1 \text{ mod } 2$$

IV. A porta *NAND*: Representa a *NOT* de *AND*, em que o bit de saída é negado dos bits de *AND* [6]. Sua representação pode ser observada na Figura 24.



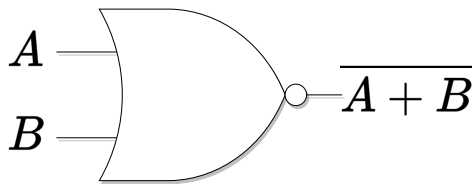
**Tabela 12** – Tabela verdade da porta *NAND*.

$A$	$B$	$\overline{AB}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

**Figura 24** – Representação de um diagrama de circuito para a porta *NAND*. Produzida pelo autor.

Os bits de entrada  $A$  e  $B$  entram na porta  $NAND$ , resultando em  $\overline{AB}$  [6]. A tabela verdade para esta porta lógica é representada pela Tabela 12. Na Figura 24, note que  $NAND$  é representado por  $AND$ , com adicional de um pequeno círculo na ponta, representando negação. Além disso,  $AB$ , com uma barra acima, representa a negação de  $AND$  [6].

- V. **A porta  $NOR$ :** Representa a  $NOT$  de  $OR$ , em que o bit de saída é negado dos bits de  $OR$  [6]. Sua representação pode ser observada na Figura 25.



**Tabela 13** – Tabela verdade da porta  $NOR$ .

$A$	$B$	$\overline{A + B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

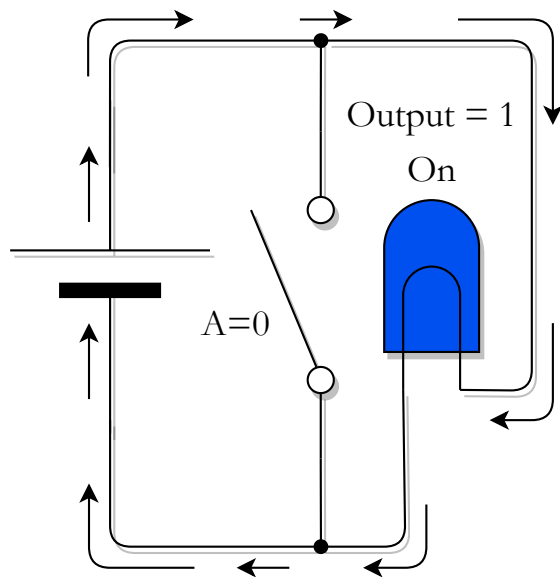
**Figura 25** – Representação de um diagrama de circuito para a porta  $NOR$ . Produzida pelo autor.

Os bits de entrada  $A$  e  $B$  entram na porta  $NOR$ , resultando em  $\overline{A + B}$ . A tabela verdade para esta porta lógica é representada pela Tabela 13. Novamente, na Figura 25, note que  $NOR$  é representado por  $OR$ , com adicional de um pequeno círculo na ponta que representa negação [6].

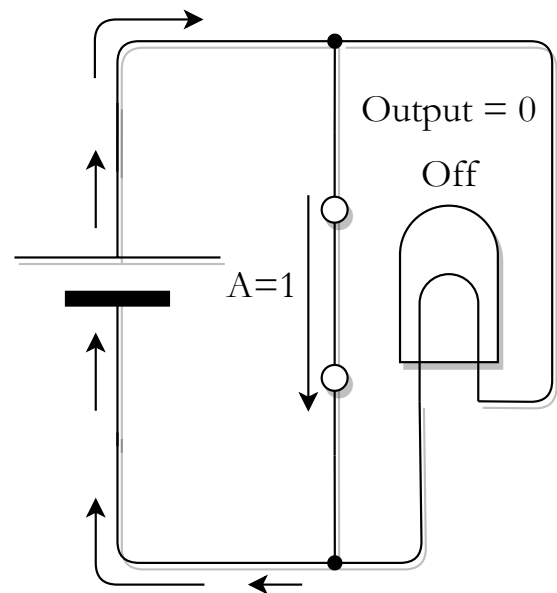
### 2.8.3.3 Exemplo para um bit

Desde então discutimos o que as portas lógicas fazem, mas não apresentamos o que elas são fisicamente. Portanto, irei apresentar apenas um exemplo utilizando um único bit. Há diferentes maneiras de representar portas lógicas fisicamente, porém a mais comum é utilizar circuitos elétricos.

Podemos considerar um circuito elétrico inicial conforme a Figura 26. Neste circuito, temos uma fonte de tensão, um *switch* (chave liga-desliga) e uma lâmpada. Podemos associar a chave como *input*  $A$  e a lâmpada como *output* [6]. A corrente elétrica flui da fonte em direção à lâmpada, iluminando-a. Note que a corrente não passa pela chave, devido a mesma estar aberta e não permitir a passagem de corrente elétrica por este caminho. Portanto, quando  $A = 0$ , temos  $output = 1$ . Ao fechar o chaveamento, como mostrado na Figura 27, temos  $A = 1$ . O caminho pelo qual a corrente elétrica percorre é aquele que apresenta menor resistência, que, por sua vez, é a passagem que possui o chaveamento fechado. Assim, como não há passagem de corrente pela lâmpada,  $output = 0$  [6].



**Figura 26** – Circuito elétrico inicial. Corrente elétrica flui pelo circuito, iluminando a lâmpada. Produzido pelo autor, adaptado de [6].



**Figura 27** – Circuito com chaveamento fechado. Corrente elétrica percorre caminho de menor resistência. Produzido pelo autor, adaptado de [6]

A partir destas informações, podemos construir a tabela verdade para este exemplo, conforme Tabela 14.

**Tabela 14** – Tabela verdade obtida no exemplo

$A$	Output
0	1
1	0

Esta é a tabela verdade para uma porta *NOT*, portanto, o circuito neste exemplo é uma porta *NOT*. Da mesma forma, podemos criar circuitos elétricos simples que implementam cada uma das outras portas lógicas [6].

## 2.9 COMPUTAÇÃO QUÂNTICA

A computação quântica é um tipo de computação em que as informações são processadas usando bits quânticos, ou qubits, que utilizam conceitos da mecânica quântica para o processamento dessa unidade de informação [7]. Com isso, permite-se que os computadores quânticos executem certos tipos de cálculos muito mais rapidamente que computadores clássicos. Códigos de criptografias conseguem ser quebrados mais

rapidamente em computadores quânticos do que clássicos, assim como criar simulações extremamente complexas [7]. Como exemplo, em 2019, a *Google* anunciou que seu computador quântico realizou um cálculo que seria praticamente impossível até mesmo para o melhor supercomputador do mundo. O computador quântico interno quebrou o cálculo de um gerador de números aleatórios em apenas 3 minutos e 20 segundos, em comparação, o supercomputador mais rápido do mundo chamado de *Summit* levaria cerca de 10.000 anos para realizar o mesmo cálculo [8].

Logo, a sua utilidade está em resolver problemas e operações que os modelos clássicos modernos não conseguem ou demoram até demais para fazer, como cálculos complexos e processamentos em banco de dados com imensos dados. A ideia é aplicar em meios corporativos e empresas que necessitam de rapidez para realizar essas tarefas [9].

Para permitir a ação dos qubits, os aparelhos precisam estar em ambientes especiais, completamente longes de ruídos ambientes e em baixíssimas temperaturas [9]. Logo, um computador quântico deve estar bem isolado a fim de reter suas propriedades quânticas, mas, ao mesmo tempo, seus qubits devem ser acessíveis para serem manipulados para realizar a computação e a leitura do estado [1].

Nesta seção, serão abordados o bit utilizado na computação quântica, chamado de qubit, assim como sua representação na *esfera de Bloch*; a representação de múltiplos qubits; as operações que podem ser realizadas sobre o qubit com os operadores, assim como o diagrama de circuito quântico. Por fim, será discutido o *algoritmo de Grover* aplicado a um exemplo utilizando dois qubits, construindo o circuito quântico em um *software* gratuito. O leitor verá analogias da mecânica quântica estudada anteriormente por meio de fótons polarizados individuais

### 2.9.1 O qubit

Um bit quântico, ou qubit, é ao mesmo tempo semelhante e diferente de um bit clássico em algumas maneiras importantes. Primeiramente, assim como um bit clássico, um qubit pode assumir dois valores, 0 ou 1 [6]. Abaixo é visto a diferença da representação do bit clássico e o qubit, o bit quântico:

$$\text{Bit clássico} \implies 1 \quad \text{Bit quântico} \implies |1\rangle$$

$$\text{Bit clássico} \implies 0 \quad \text{Bit quântico} \implies |0\rangle$$

Porém, conforme estudado para a polarização de fótons, estes qubits podem estar em uma superposição, com amplitudes  $\alpha$  e  $\beta$  associados [1]:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (40)$$

Aqui encontramos a primeira analogia à conceitos da mecânica quântica, a da superposição. Na computação clássica, podemos controlar quando um bit será 0 ou 1. No entanto, na computação quântica, os qubits podem estar em superposição, assumindo estados simultâneos de  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  [6]. Isso introduz um caráter totalmente probabilístico dos qubits.

Como os qubits estão relacionados a sistemas de dois níveis, definimos os estados de qubit  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  pela base canônica de dois níveis:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A representação para vários qubits será vista futuramente, sendo necessário utilizar o *produto tensorial* entre os qubits.

### 2.9.1.1 Representação do qubit

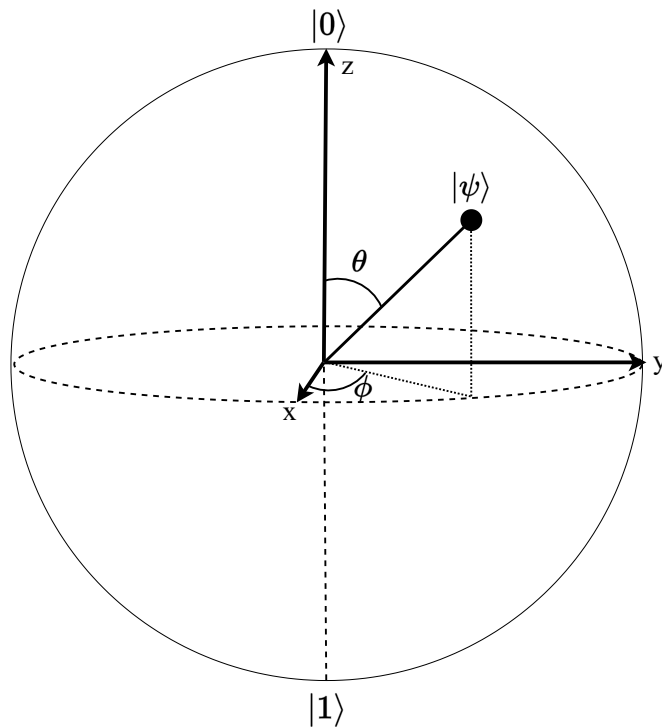
Podemos representar o vetor de estado  $|\psi\rangle$  de uma forma geométrica e mais geral, conhecida como *esfera de Bloch* ou *representação de Bloch* [1]. Para representar  $|\psi\rangle$ , as amplitudes  $\alpha$  e  $\beta$  podem ser escritas como [6]:

$$\alpha = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \beta = e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Note que esta representação satisfaz a condição de normalização  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  e que a fase  $e^{i\phi}$  não altera a probabilidade relacionados aos estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ . A Eq. 40 se torna:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle \quad (41)$$

Os termos  $\theta$  e  $\phi$  da Eq. 41 definem um ponto na superfície de uma esfera de raio unitário (veja Figura 28). Logo, os estados para um qubit, correspondendo a  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , podem ser descritos como uma esfera de raio unitário [1].



**Figura 28** – Representação de  $|\psi\rangle$  na esfera de Bloch. Produzida pelo autor, adaptado de [1].

### 2.9.1.2 Múltiplos Qubits

Quando temos múltiplos qubits, escrevemos seus estados como um produto tensorial  $\otimes$  [6]. Por exemplo, dois qubits  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$  onde ambos estão no estado  $|0\rangle$ :

$$|\psi\rangle = |0\rangle$$

$$|\phi\rangle = |0\rangle$$

Por sua vez, o produto tensorial:

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$$

Onde é pronunciado como “zero tensor zero” ou “ $\psi$  tensor  $\phi$ ” [6]. Frequentemente, é omitido o símbolo do produto tensorial, deixando uma notação mais limpa [6]:

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$|\psi\rangle |\phi\rangle = |0\rangle |0\rangle$$

$$|\psi\phi\rangle = |00\rangle$$

Na álgebra linear, o produto tensorial é simplesmente o chamado *produto de*



*Kronecker*, onde consiste em multiplicar cada termo da primeira matriz pelo conjunto total da segunda matriz [6]. Como visto anteriormente,  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  são representados pela base canônica, o produto tensorial de dois qubits:

$$|00\rangle = |0\rangle|0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O processo é o mesmo para os demais estados:

$$\boxed{\begin{array}{cccc} |00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & |01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}}$$

Para dois qubits  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$  da forma mais geral:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$|\phi\rangle = \eta|0\rangle + \gamma|1\rangle$$

O produto tensorial por sua vez será:

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\eta|0\rangle + \gamma|1\rangle)$$

$$|\psi\phi\rangle = (\alpha\eta|0\rangle \otimes |0\rangle) + (\alpha\gamma|0\rangle \otimes |1\rangle) + (\beta\eta|1\rangle \otimes |0\rangle) + (\beta\gamma|1\rangle \otimes |1\rangle)$$

$$|\psi\phi\rangle = \alpha\eta|00\rangle + \alpha\gamma|01\rangle + \beta\eta|10\rangle + \beta\gamma|11\rangle$$

Podemos simplificar as notações:

$$|\Psi\rangle = \underbrace{\alpha\eta}_{|\psi\phi\rangle}|00\rangle + \underbrace{\beta\eta}_{\alpha\gamma}|01\rangle + \underbrace{\alpha\gamma}_{\beta\eta}|10\rangle + \underbrace{\beta\gamma}_{\beta\gamma}|11\rangle$$

$$\boxed{|\Psi\rangle = \alpha'|00\rangle + \beta'|01\rangle + \eta'|10\rangle + \gamma'|11\rangle} \quad (42)$$

Perceba que  $|\Psi\rangle$  não é mais facilmente representado na esfera de Bloch, tendo uma limitação apenas para 1 qubit [1]. O número de estados possíveis que pode tomar se resume a  $N = 2^n$ , sendo  $n$  o número de qubits<sup>1</sup> [1].

<sup>1</sup>Para  $n = 3$ , teríamos  $N = 8$ . Ou seja:  $|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle$  e  $|111\rangle$ .

## 2.9.2 Portas quânticas: Operações sobre qubits

Portas quânticas atuam em qubits da mesma forma que portas lógicas atuam em bits. Veremos o que são as portas quânticas e qual a sua função.

Uma porta quântica é responsável por transformar um estado de um qubit [1]. Por enquanto, será denotado por  $U$  uma porta quântica genérica. Uma porta quântica deve ser linear, ou seja, apresenta propriedade distributiva entre superposições. Ou seja, por exemplo [6]:

$$U(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha U|0\rangle + \beta U|1\rangle \quad (43)$$

Além disso, para que este seja uma porta quântica válida, a *probabilidade total deve permanecer 1* [6].

### 2.9.2.1 Portas quânticas comuns para um qubit

Uma vez que uma porta quântica válida preserva a probabilidade total, podemos listar algumas portas importantes para um qubit que serão utilizadas futuramente e que frequentemente aparecem na computação quântica:

I. **A porta identidade  $I$ :** Transforma um estado  $|0\rangle$  em  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  em  $|1\rangle$  [6]. Portanto:

$$I|0\rangle = |0\rangle$$

$$I|1\rangle = |1\rangle$$

Ou seja, não altera o estado<sup>2</sup>. Sua forma matricial é representada como [1]:

$$\sigma_0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

II. **A porta *Pauli X* ou *NOT*:** Transforma  $|0\rangle$  em  $|1\rangle$  e  $|1\rangle$  em  $|0\rangle$  [6]. Logo:

$$X|0\rangle = |1\rangle$$

$$X|1\rangle = |0\rangle$$

Note a equivalência com a porta *NOT* clássica. Sua representação matricial [1]:

$$\sigma_1 = \sigma_x = X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

---

<sup>2</sup>De forma geral, qualquer estado que seja, *ele não será alterado*.

Na esfera de Bloch, isso pode ser entendida como uma rotação em  $180^\circ$  do estado em torno do eixo  $x$  [6].

III. **A porta *Pauli Y*:** Transforma  $|0\rangle$  em  $i|1\rangle$  e  $|1\rangle$  em  $-i|0\rangle$  [6]. Portanto:

$$\begin{aligned} Y|0\rangle &= i|1\rangle \\ Y|1\rangle &= -i|0\rangle \end{aligned}$$

Note que esta não é uma porta clássica usual, devido a presença do número imaginário  $i$ . Sua forma matricial [1]:

$$\sigma_2 = \sigma_y = Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Na esfera de Bloch, isso pode ser entendida como uma rotação em  $180^\circ$  do estado em torno do eixo  $y$  [6].

IV. **A porta *Pauli Z*:** Mantém  $|0\rangle$  em  $|0\rangle$  e transforma  $|1\rangle$  em  $-|1\rangle$  [6]. Assim:

$$\begin{aligned} Z|0\rangle &= |0\rangle \\ Z|1\rangle &= -|1\rangle \end{aligned}$$

Esta também não é uma porta clássica usual. Sua representação matricial [1]:

$$\sigma_3 = \sigma_z = Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Na esfera de Bloch, isso pode ser entendida como uma rotação em  $180^\circ$  do estado em torno do eixo  $z$  [6].

V. **A porta *Hadamard H*:** Transforma  $|0\rangle$  em  $|+\rangle$  e  $|1\rangle$  em  $|-\rangle$ . Esta porta é algumas vezes denominada de “raiz quadrada de não” [1], e é responsável por criar superposições de estados computacionais. Segue:

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle \\ H|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle \end{aligned}$$

Onde  $|-\rangle$  e  $|+\rangle$  são ditos estados de *base qubit* [1]. A forma matricial de  $H$  [1]:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Estas matrizes, ou portas quânticas, têm como função realizar operações ou transformações sobre o estado, da mesma forma que os operadores quânticos discutidos anteriormente! As matrizes de Pauli são unitárias porque preservam a sua norma (não altera probabilidade total), podendo ser visualizadas na esfera de Bloch com transformações unitárias sobre um qubit [1]. Há outras portas quânticas importantes que devem ao menos serem citadas, como: porta *Phase*, e porta *T*.

### 2.9.2.2 Portas quânticas para dois qubits

As portas quânticas podem ser aplicadas em dois qubits ao mesmo tempo. Uma porta importante, e a única relacionada a dois qubits que será trabalhado aqui, é a porta *CNOT*, “não controlado”. Você já deve ter visto a expressão “Se A for verdadeiro, execute B”. Este é um tipo de operação controlada, sendo uma das mais úteis tanto na computação clássica quanto na quântica [1]. Ela recebe dois qubits na sua entrada, chamados de *qubit de controle* e *qubit alvo* [1]. Caso o qubit de controle for  $|1\rangle$ , o estado do qubit alvo será trocado. Ou seja:

$$\begin{aligned} CNOT|00\rangle &= |00\rangle \\ CNOT|01\rangle &= |01\rangle \\ CNOT|10\rangle &= |11\rangle \\ CNOT|11\rangle &= |10\rangle \end{aligned}$$

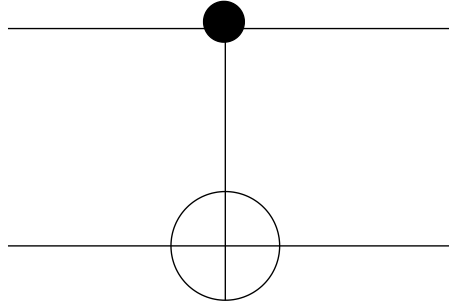
Neste caso, o qubit da esquerda é referido como o bit de controle e o da direita como qubit alvo<sup>3</sup>. Note que caso a condição não seja satisfeita, nada acontece com o estado. Sua forma matricial é representada como [1]:

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

---

<sup>3</sup>Para ter mais clareza de qual qubit é alvo ou controle, é necessário observar como está posicionado a porta *CNOT* no circuito quântico.

Além disso, a representação em um circuito quântico, que será visto na seção 2.9.3, é observado na Figura 29. O qubit de controle é onde  $\bullet$  está posicionado e o qubit alvo é onde  $\oplus$  está posicionado.

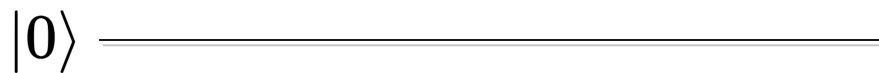


**Figura 29** – Representação da porta *CNOT*. Produzido pelo autor.

Há outras portas importantes que podem ser citadas, como: porta *U-controlado* e *SWAP*. Para três qubits, teríamos a porta *Toffoli*, que não se encaixa nos nossos objetivos e não será abordada.

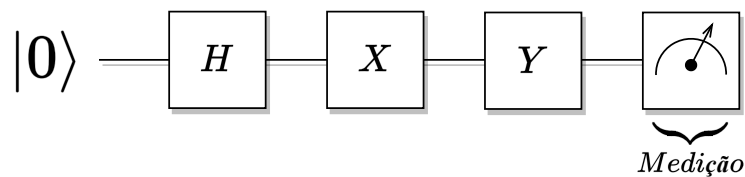
### 2.9.3 Circuitos quânticos

Assim como foi estudado os circuitos clássicos em que consistia em bits e portas lógicas com suas representações, podemos então ilustrar *diagramas de circuitos quânticos* que consistem em qubits e portas quânticas [6]. Uma *trilha qubit* pode ser representada como mostra a Figura 30.



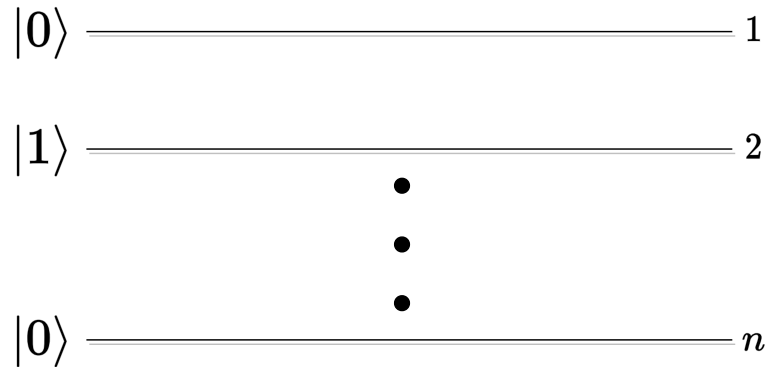
**Figura 30** – Exemplo de uma trilha para um qubit iniciado no estado  $|0\rangle$ . Produzido pelo autor.

Podemos então, adicionar as portas quânticas ao circuito, como por exemplo mostrado na Figura 31.



**Figura 31** – Exemplo de uma trilha para um qubit com portas quânticas atuando sobre o mesmo. Produzido pelo autor.

Assim como nos diagramas de circuitos clássicos, o circuito é lido da esquerda para a direita. Logo, temos um único qubit iniciado no estado  $|0\rangle$  e aplicamos uma porta Hadamard  $H$ , em seguida uma porta Pauli  $X$  e Pauli  $Y$ . Por fim, é medido o qubit no final do circuito (veja Figura 31). Para uma representação matemática do circuito, é descrito como  $YXH|0\rangle$ . Para múltiplos qubits, o circuito pode ser representado conforme Figura 32.



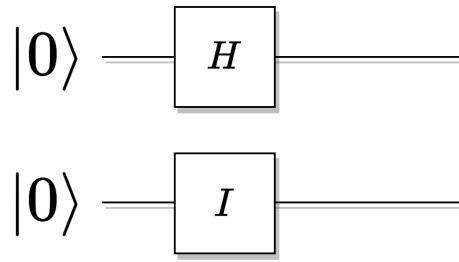
**Figura 32** – Exemplo de uma trilha para  $n$  qubits iniciados em estados escolhidos por acaso. Produzido pelo autor.

Agora, imagine que temos múltiplos qubits e queremos aplicar uma porta apenas em um único qubit. Suponhamos que temos dois qubits nos estados  $|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle$  e, desejamos aplicar uma porta quântica no qubit da esquerda (porta Hadamard, por exemplo), enquanto o qubit da direita permanece o mesmo. Como o qubit da direita deve permanecer inalterado, aplicamos a ele o operador identidade  $I$  [6]. Logo, escrevemos a atuação dos operadores nos qubits da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (H \otimes I)(|0\rangle \otimes |0\rangle) &= H|0\rangle \otimes I|0\rangle \\ (H \otimes I)|00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle \\ (H \otimes I)|00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle) \end{aligned}$$

$$\boxed{(H \otimes I)|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)}$$

Você pode utilizar as representações matriciais vistas nas seções 2.9.2.1 e 2.9.2.2, uma vez que podem ser mais fáceis de serem trabalhadas dessa forma. Um diagrama de circuito quântico de dois qubits para esta operação é ilustrado na Figura 33. Foi respeitada a convenção adotada por [1], de que o qubit mais a esquerda corresponde ao qubit mais acima do diagrama; e o qubit mais a direita ao qubit mais abaixo do diagrama.



**Figura 33** – Diagrama de circuito quântico para dois qubits. A porta Hadamard atua no qubit acima enquanto a porta identidade atua no qubit abaixo. Produzido pelo autor.

#### 2.9.4 Algoritmo de busca de Grover

Será apresentado de forma conceitual e simples o algoritmo de busca de Grover, mantendo o significado e a essência do mesmo. Com finalidade didática, será mostrado um exemplo utilizando dois qubits para o algoritmo de Grover, juntamente com um *software* para a manipulação e leitura.

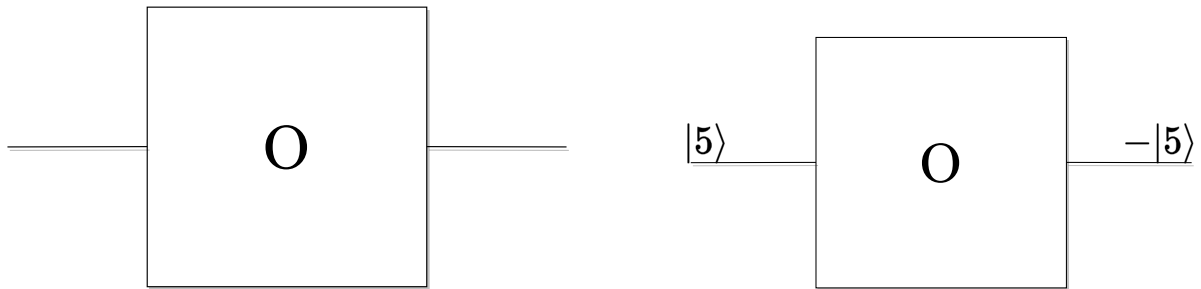
Imagine que você queira encontrar um número de telefone em uma lista telefônica não ordenada imensa contendo  $N$  elementos em um banco de dados não ordenado. Para um computador clássico, seria necessário em média  $N/2$  operações para que se encontre o elemento desejado [1]. Porém a velocidade de busca é reduzida a  $\sqrt{N}$  operações ao utilizar um algoritmo quântico, o algoritmo de Grover [1]. Devemos introduzir e entender de forma mais geral o caminho que o algoritmo toma para que o elemento desejado seja encontrado. O primeiro passo é criar uma superposição igual de todos os elementos possíveis que estamos procurando [1]. E para isso, utilizamos o operador Hadamard. Retornando no exemplo da lista telefônica, imaginamos  $N = 100$  elementos:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle \quad (50)$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{10} (|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + \dots + |99\rangle)$$

Onde *cada estado corresponde a um item da lista telefônica*. Realizada a superposição, introduzimos então o *oráculo*. Ele se baseia em fornecermos uma entrada e ela nos retorna uma saída, sem que saibamos como funciona internamente. Você pode pensar em uma “caixa preta” que possui a capacidade de reconhecer soluções do problema [1]. Atenção: ele não sabe me informar a resposta explicitamente, porém ele identifica se o elemento é a solução. Por exemplo, no jogo de Sudoku, o oráculo não sabe resolvê-lo, porém sabe verificar se a disposição dos números leva à resposta correta.

Em nosso caso da lista telefônica podemos fazer a seguinte consulta: “Oráculo, o item  $|1\rangle$  está correto?” Se o oráculo responder “Sim”, encontramos nosso item. Se o oráculo responder “Não”, podemos perguntar sobre outro item: “Oráculo, o item  $|2\rangle$  está correto?” Podemos continuar assim até que o oráculo diga “Sim” [6]. Uma representação do oráculo é observado na Figura 34.



**Figura 34** – Uma representação do oráculo. Produzido pelo autor.

**Figura 35** – Mudança de fase do estado  $|5\rangle$  causada pelo oráculo. Produzido pelo autor.

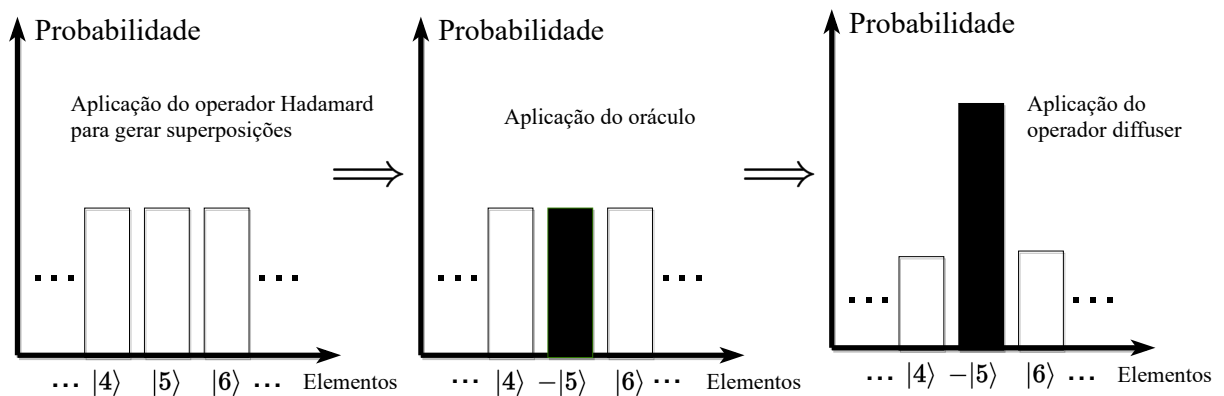
A função do oráculo é marcar as soluções do problema de busca, *mudando a sua fase* [1]. Assim, caso o estado  $|5\rangle$  seja a solução, o oráculo *inverterá a fase do estado*. Ou seja, como representado na Figura 35. Matematicamente, o oráculo é descrito pela Eq. 51.

$$|x\rangle \xrightarrow{O} (-1)^{f(x)} |x\rangle \quad (51)$$

Logo, o oráculo é uma função  $f(x)$  que produz 0 (não) ou 1 (sim). Avaliar  $f(5)$  é questionar ao oráculo se o ítem  $|5\rangle$  é o correto. Se  $f(5) = 1$ , encontramos o ítem. Caso contrário,  $f(5) = 0$  indica que  $|5\rangle$  não é o item correto, e o oráculo continua a analisar outros estados [6]. Para um problema de busca contendo  $N$  elementos e  $M$  soluções, o oráculo precisa ser aplicado  $O(\sqrt{N/M})$  [1]. Por fim, agora identificados os elementos soluções através do oráculo e invertido sua fase, aplicamos o chamado a *porta diffuser* (também chamado de *operador Grover G*). Este operador é capaz de aumentar a probabilidade da solução e reduzir a probabilidade de outros elementos não solução [1].

De forma geral, uma iteração completa pode ser visualizada na Figura 36. Tanto o oráculo quanto o operador Grover são um conjunto dos operadores para um qubit e dois qubits, discutidos na seção 2.9.2.1 e 2.9.2.2.

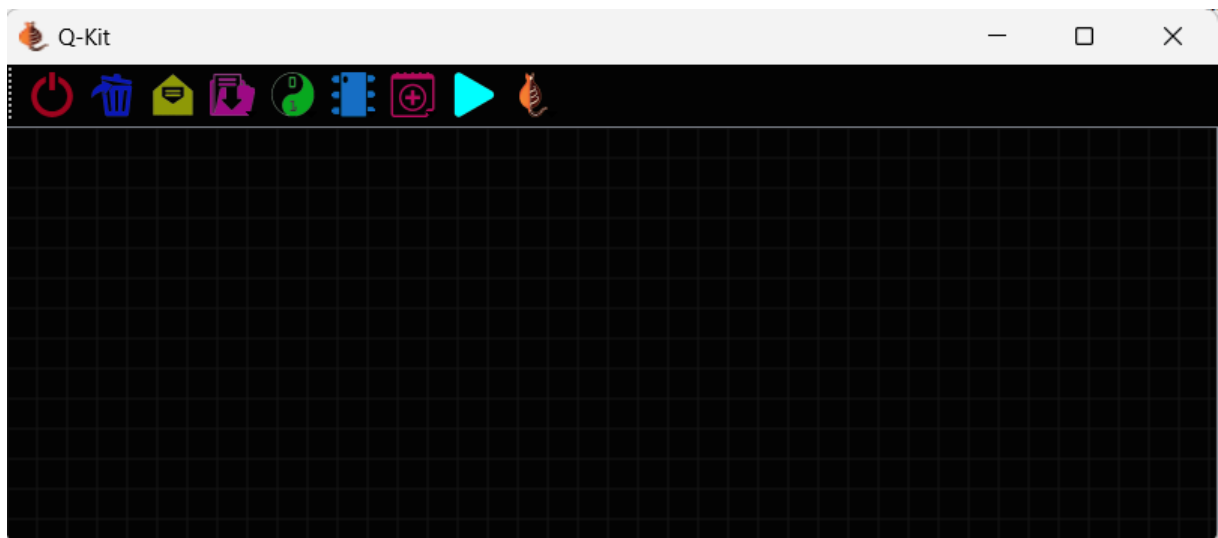




**Figura 36** – Iteração completa do algoritmo de Grover. Produzido pelo autor.

### 2.9.5 Apresentação do *software Q-kit*

O Q-kit é um ambiente de controle e manipulação de circuitos quânticos, oferecendo diversas funções de análise e construção do circuito. O software Q-kit pode ser baixado gratuitamente na referência [10] deste material. Ao abrir o programa, nos deparamos com o ambiente de trabalho observado na Figura 37.



**Figura 37** – Interface do *software Q-kit*.

No canto superior esquerdo, encontramos as funções que o programa oferece, tais como limpar ambiente, abrir circuito já feito, salvar circuito, adicionar qubit, adicionar operadores e manipular os estágios do circuito. Os operadores mencionados anteriormente estão presentes no programa, porém com notação diferente (por exemplo, a porta quântica  $Z$  é representada como  $Sz$  no programa, assim como outros). Para adicionar qubits, direcionamos até a caixa de seleção *add qubit* em verde. Você pode se deparar com  $[1,0]$  ao lado das trilhas dos qubits; isto indica a amplitude de probabilidade relacionada aos

estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  respectivamente (para este caso, nos diz que ambos os qubits estão iniciados no estado  $|0\rangle$ ). Na caixa de seleção *add Quantum gates* em azul, você pode selecionar as portas quânticas que deseja utilizar no circuito. Há outras funções que o programa oferece. Logo, o leitor deve ficar livre para explorá-lo.

### 2.9.6 Algoritmo de Grover: Exemplo utilizando dois qubits

Será visto um exemplo do algoritmo de Grover utilizando dois qubits a fim de acompanhar os estados finais utilizando o *software* proposto. A utilização de dois qubit nos permite ter um estado  $|\psi\rangle$  que, conforme visto anteriormente, terá  $2^n$  estados possíveis. Temos, portanto, dois qubits da forma:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$|\phi\rangle = \eta|0\rangle + \gamma|1\rangle$$

Como  $n = 2$ , temos  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$  possíveis estados. Aplicando o produto tensorial:

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\eta|0\rangle + \gamma|1\rangle)$$

$$|\Psi\rangle = \alpha'|00\rangle + \beta'|01\rangle + \eta'|10\rangle + \gamma'|11\rangle$$

O leitor pode pensar como em quatro cores diferentes: azul, vermelho, verde e amarelo. Essas quatro cores correspondem aos quatro estados mencionados, respectivamente. Imaginamos que queremos encontrar, por exemplo, a cor amarela que corresponde ao estado  $|11\rangle$ <sup>4</sup>, onde o estado inicial é  $|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle$ . Para isso, definimos as amplitudes de probabilidades  $\beta', \eta'$  e  $\gamma'$  igual a zero, e  $\alpha'$  igual a um:

$$\boxed{|\Psi_0\rangle = |00\rangle}$$

O diagrama completo do circuito quântico encontra-se na Figura 38. Aconselho que o leitor acompanhe com o diagrama cada passo realizado com os estados. Iniciado o estado, nosso próximo passo é criar uma superposição igual de todos os quatro possíveis elementos.

---

<sup>4</sup>Para fins didáticos, apenas para o estado  $|11\rangle$  será realizado por completo todo o desenvolvimento matemático necessário.

Para realizarmos isso, aplicamos a porta Hadamard em ambos os qubits:

$$|\Psi_1\rangle = (H \otimes H)|\Psi_0\rangle$$

$$|\Psi_1\rangle = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies |\Psi_1\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{|\Psi_1\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies |\Psi_1\rangle = \frac{1}{2} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)}$$

Para fins de praticidade, deixamos aqui:

$$(H \otimes H) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (52)$$

Em seguida, aplicamos a porta Hadamard no primeiro qubit e não alteramos o segundo:

$$|\Psi_2\rangle = (H \otimes I)|\Psi_1\rangle$$

$$|\Psi_2\rangle = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} |\Psi_1\rangle \implies |\Psi_2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies |\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |01\rangle)}$$

Novamente, por questões de praticidade, deixamos aqui:

$$(H \otimes I) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (53)$$

Agora, aplicamos um *CNOT*, onde o qubit de controle é o segundo qubit e o qubit alvo, o primeiro:

$$|\Psi_3\rangle = CNOT |\Psi_2\rangle \implies |\Psi_3\rangle = CNOT \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |01\rangle) \right]$$

$$\boxed{|\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)}$$

Aplicamos novamente a porta Hadamard no primeiro qubit e a porta identidade no segundo. Utilizando Eq. 53:

$$|\Psi_4\rangle = (H \otimes I) |\Psi_3\rangle \implies |\Psi_4\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{|\Psi_4\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \implies |\Psi_4\rangle = \frac{1}{2} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)}$$

Note que marcamos o estado  $|11\rangle$  requerido. Logo, a sequência de operação ( $H CNOT H$ ) foi nosso oráculo! Continuando, aplicamos a porta Hadamard em ambos os qubits. Utilizando Eq. 52:

$$|\Psi_5\rangle = (H \otimes H) |\Psi_4\rangle \implies |\Psi_5\rangle = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{|\Psi_5\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \implies |\Psi_5\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)}$$

Em seguida, aplicamos a porta *Pauli Z* em ambos os qubits:

$$|\Psi_6\rangle = (Z \otimes Z)|\Psi_5\rangle$$

$$|\Psi_6\rangle = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \implies |\Psi_6\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{|\Psi_6\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \implies |\Psi_6\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)}$$

O próximo passo é aplicar a porta Hadamard no primeiro qubit e a porta identidade no segundo. Novamente, utilizando Eq. 53:

$$|\Psi_7\rangle = (H \otimes I)|\Psi_6\rangle \implies |\Psi_7\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{|\Psi_7\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies |\Psi_7\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|01\rangle + |10\rangle)}$$

Para o próximo passo, atuamos novamente a porta *CNOT*, com o primeiro qubit sendo o alvo e o segundo qubit o de controle:

$$|\Psi_8\rangle = CNOT|\Psi_7\rangle \implies |\Psi_8\rangle = CNOT \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(-|01\rangle + |10\rangle) \right]$$

$$\boxed{|\Psi_8\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|11\rangle + |10\rangle)}$$

Para a nossa penúltima interação, aplicamos  $H \otimes I$  no estado:

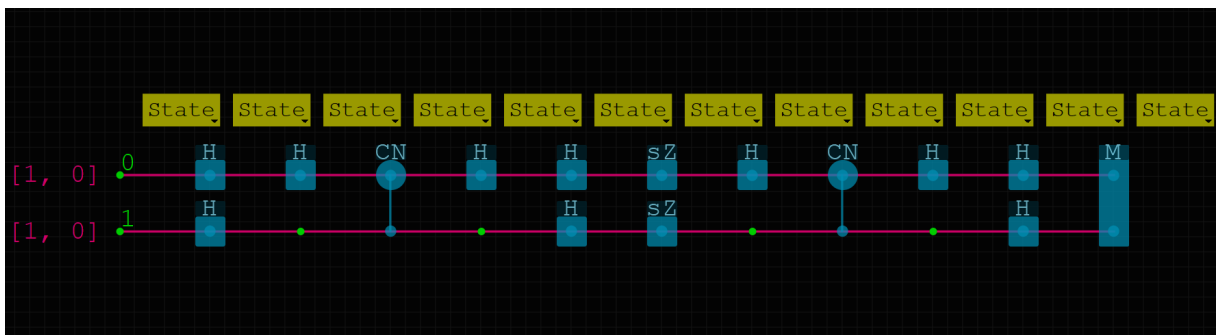
$$|\Psi_9\rangle = (H \otimes I)|\Psi_8\rangle \implies |\Psi_9\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$|\Psi_9\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies |\Psi_9\rangle = \frac{1}{2} (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$$

Para finalizar as interações, atuamos  $H \otimes H$ :

$$|\Psi_{10}\rangle = (H \otimes H)|\Psi_9\rangle \implies |\Psi_{10}\rangle = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

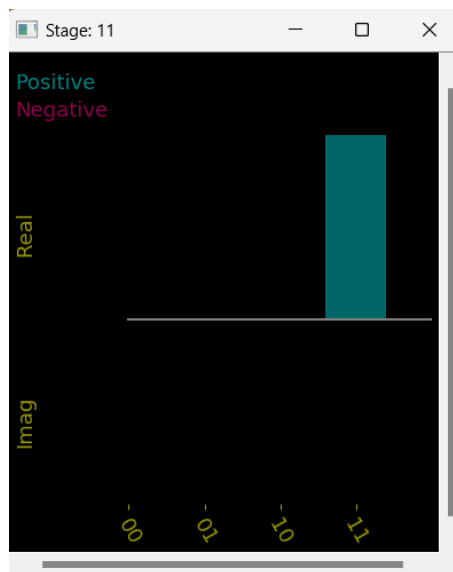
$$|\Psi_{10}\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \implies |\Psi_{10}\rangle = |11\rangle$$



**Figura 38** – Circuito completo realizada no software Q-kit para o estado  $|11\rangle$ .

Observe que, a partir de  $|\Psi_5\rangle$  até  $|\Psi_{10}\rangle$ , temos o circuito correspondente ao *diffuser*. Ou seja, reduzimos a probabilidade de encontrar os estados não requeridos ( $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ ) e aumentar a probabilidade de encontrar o estado requerido,  $|11\rangle$ .

Realizando a medição do estado final no *software*, encontramos a distribuição na Figura 38. Além do estado final, você pode verificar o estado em qualquer momento do algoritmo apenas selecionando *run simulation* no programa e escolhendo o estado que deseja verificado. Note que apenas uma iteração completa do algoritmo de Grover é necessária para encontrar uma amplitude de 100% para o estado  $|11\rangle$  desejado. Para maiores valores de qubit, a iteração deve ser repetida várias vezes consecutivas. Os três estados restante,  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$  podem ser construídos seguindo a mesma iteração conforme discutido na seção 2.9.4. Os passos para os outros três estados encontram-se em Apêndice A.



**Figura 39** – Medição do estado final realizada no programa.

### 3 CONCLUSÃO

Aprender os princípios básicos e postulados da mecânica quântica no contexto da polarização de fótons, em contraste de muitos livros de graduação que introduzem o experimento de Stern-Gerlach, demonstra uma forma mais intuitiva e simples de se apresentar a mecânica quântica, ideal para leitores pouco familiarizados com a área. Com isso, desenvolvemos alguns dos principais postulados da mecânica quântica, sendo esses postulados os princípios fundamentais que formam a base da mecânica quântica e observar o caráter probabilístico dessa teoria.

Com as ideias principais da mecânica quântica em mente, o desenvolvimento de circuitos quânticos e computação quântica deixam de ser intimidantes. Todos os conceitos trabalhados com a polarização podem ser observados como analogias: superposição de estado, operadores, probabilidades de colapso do estado quântico. As portas lógicas quânticas, como as matrizes de Pauli, matriz identidade e a porta hadamard, são análogas aos operadores vistos na polarização. Para encerrar a sequência didática, aplicamos todo o conhecimento em um exemplo envolvendo dois qubits, resultando em quatro estados em superposição, no algoritmo de busca quântica de Grover. Esse algoritmo é capaz de realizar buscas em banco de dados não estruturado com uma rapidez  $\sqrt{N}$  operações, comparado ao computador clássico onde seriam necessárias  $N$ .

Como indicação, os leitores interessados em estudar a teoria quântica por meio de outra abordagem, como os estados de spin de átomos, poderão consultar o livro *Quantum Mechanics: A Paradigms Approach* pelo autor David H. McIntyre. Neste livro, você encontrará toda a construção básica da mecânica quântica por meio dos estados de spin de átomos, que é uma propriedade intrínseca de partículas subatômicas descoberta por Otto Stern e Walther Gerlach em seu famoso experimento totalmente quântico, conhecido como “Experimento de Stern-Gerlach”.

Os desafios eventualmente observados podem ser devido ao ferramental matemático complexo com qual a mecânica quântica é descrita, sendo necessário possuir uma base sólida em álgebra linear. Além, claro, da total abstração dessa teoria. Por fim, o trabalho atingiu seus objetivos de forma satisfatória: fornecer uma construção didática técnica para o estudo da mecânica quântica na abordagem de fótons polarizados, visando proporcionar uma melhor primeira impressão da computação quântica, circuitos e algoritmos quânticos. Desta forma, servindo como um material técnico introdutório para a teoria quântica e computação quântica.



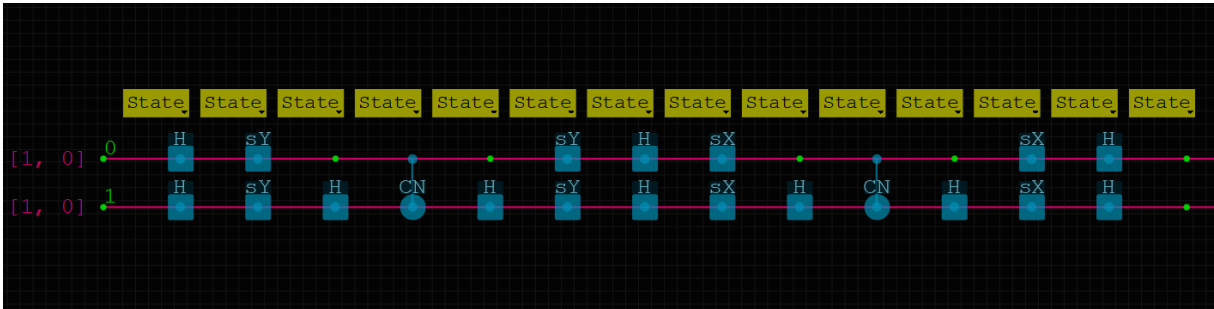
## REFERÊNCIAS

- [1] NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Computação quântica e informação quântica**; Tradução Ivan S. Oliveira. - Porto Alegre: Bookman, 2005. 733 p.
- [2] NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de física básica: ótica, relatividade e física quântica**. Vol 4. São Paulo: E. Blücher, 1998;
- [3] Autor Desconhecido. **Aula 2: Polarização da Luz. 2017**. DOCPLAYER. Disponível em: <https://docplayer.com.br/46294942-Polarizacao-da-luz-aula-resumo-2-2-polarizacao-da-luz-tratamento-classico.html>.
- [4] YOUNG, HUGH D. **Física IV: Sears e Zemansky: ótica e física moderna / Hugh D. Young, Roger A. Freedman; colaborador A. Lewis Ford; tradução Daniel Vieira; revisão técnica Adir Moysés Luiz. – 14. ed. – São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016.**
- [5] MCINTYRE, D.; Manogue, C. A.; TATE, J. **Quantum Mechanics: A Paradigms Approach**, Addison-Wesley, 2012.
- [6] WONG, T. G. **Introduction to classical and quantum computing**. Rooted Grove, Omaha, Nebraska. 2022. 388 p.
- [7] Engenharia Detalhada. O que é Computação Quântica? Computação Quântica: O que é, História e Aplicações. **YouTube**, 23 de fev. 2023. Disponível em: <https://youtu.be/yLvetNt6StY?si=TOi9wXeIIaHCuBIL>. Acesso em: 08 dez. 2023.
- [8] CANCELIER, M. Google realiza cálculo quase impossível com seu computador quântico. **Mundo Conectado**, 29 set. 2019. Disponível em: <https://www.mundoconectado.com.br/google/google-realiza-calculo-quase-impossivel-com-seu-computador-quantico/>. Acesso em: 08 dez. 2023.
- [9] Techmundo. Entenda: o que são os computadores quânticos - TecMundo. **YouTube**, 26 de out. 2019. Disponível em: <https://youtu.be/1EpLuvmmQWc?si=3teRvAM9c-qIJmz->. Acesso em: 08 dez. 2023.
- [10] QKIT. **Quantum-Kit**. Q-kit é um simulador gráfico de circuitos quânticos. Página Inicial. Disponível em: <https://sites.google.com/view/quantum-kit/home>.

## APÊNDICE A – SOLUÇÃO DE OUTROS ESTADOS DA SEÇÃO 2.9.6.

### A.1 SOLUÇÃO PARA O ESTADO $|00\rangle$

O diagrama completo do circuito quanto para este estado pode ser observado na Figura 40.



**Figura 40** – Circuito completo realizada no software Q-kit para o estado  $|00\rangle$ .

Considerando o estado inicial sendo  $|00\rangle$ :

$$|\Psi_0\rangle = |00\rangle$$

$$|\Psi_1\rangle = (H \otimes H) |\Psi_0\rangle \quad \Rightarrow \quad |\Psi_1\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$$

$$|\Psi_2\rangle = (Y \otimes Y) |\Psi_1\rangle \quad \Rightarrow \quad |\Psi_2\rangle = \frac{1}{2}(-|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$$

$$|\Psi_3\rangle = (I \otimes H) |\Psi_2\rangle \quad \Rightarrow \quad |\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|01\rangle + |11\rangle)$$

$$|\Psi_4\rangle = CNOT |\Psi_3\rangle \quad \Rightarrow \quad |\Psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|01\rangle + |10\rangle)$$

$$|\Psi_5\rangle = (I \otimes H) |\Psi_4\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_5\rangle = \frac{1}{2}(-|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)}$$

$$|\Psi_6\rangle = (Y \otimes Y) |\Psi_5\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_6\rangle = \frac{1}{2}(-|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)}$$

$$|\Psi_7\rangle = (H \otimes H) |\Psi_6\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_7\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)}$$

$$|\Psi_8\rangle = (X \otimes X) |\Psi_7\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_8\rangle = \frac{1}{2}(-|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)}$$

$$|\Psi_9\rangle = (I \otimes H) |\Psi_8\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_9\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|00\rangle - |11\rangle)}$$

$$|\Psi_{10}\rangle = CNOT |\Psi_9\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|00\rangle - |10\rangle)}$$

$$|\Psi_{11}\rangle = (I \otimes H) |\Psi_{10}\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_{11}\rangle = \frac{1}{2}(-|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)}$$

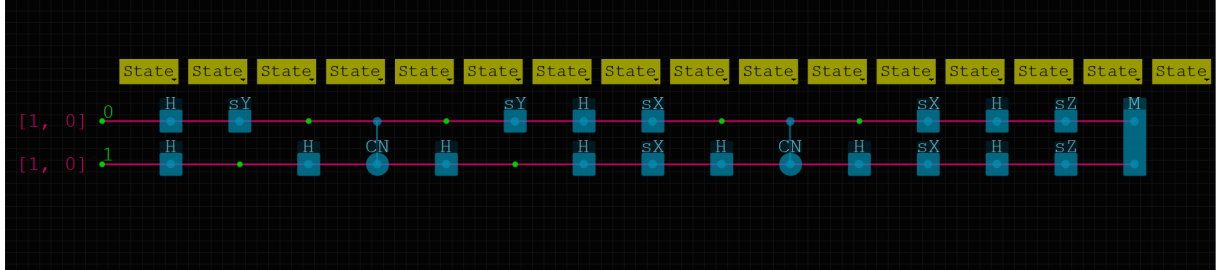
$$|\Psi_{12}\rangle = (X \otimes X) |\Psi_{11}\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_{12}\rangle = \frac{1}{2}(-|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)}$$

$$|\Psi_{13}\rangle = (H \otimes H) |\Psi_{12}\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_{13}\rangle = -|00\rangle}$$

Não se preocupe quanto ao sinal negativo. O objetivo é obter uma probabilidade maior de encontrar o estado. Ao efetuarmos a medição (tomar seu módulo quadrado) o sinal negativo será irrelevante.

## A.2 SOLUÇÃO PARA O ESTADO $|01\rangle$

O diagrama completo do circuito quanto para este estado pode ser observado na Figura 41.



**Figura 41** – Circuito completo realizada no software Q-kit para o estado  $|01\rangle$ .

Considerando o estado inicial sendo  $|00\rangle$ :

$$|\Psi_0\rangle = |00\rangle$$

$$|\Psi_1\rangle = (H \otimes H) |\Psi_0\rangle \quad \Rightarrow \quad |\Psi_1\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$$

$$|\Psi_2\rangle = (Y \otimes I) |\Psi_1\rangle \quad \Rightarrow \quad |\Psi_2\rangle = \frac{i}{2}(-|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$$

$$|\Psi_3\rangle = (I \otimes H) |\Psi_2\rangle \quad \Rightarrow \quad |\Psi_3\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(-|00\rangle + |10\rangle)$$

$$|\Psi_4\rangle = CNOT |\Psi_3\rangle \quad \Rightarrow \quad |\Psi_4\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(-|00\rangle + |11\rangle)$$

$$|\Psi_5\rangle = (I \otimes H) |\Psi_4\rangle \quad \Rightarrow \quad |\Psi_5\rangle = \frac{i}{2}(-|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$$

$$|\Psi_6\rangle = (Y \otimes I) |\Psi_5\rangle \quad \Rightarrow \quad |\Psi_6\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$$

$$|\Psi_7\rangle = (H \otimes H) |\Psi_6\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_7\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)}$$

$$|\Psi_8\rangle = (X \otimes X) |\Psi_7\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_8\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)}$$

$$|\Psi_9\rangle = (I \otimes H) |\Psi_8\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_9\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)}$$

$$|\Psi_{10}\rangle = CNOT |\Psi_9\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle)}$$

$$|\Psi_{11}\rangle = (I \otimes H) |\Psi_{10}\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_{10}\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)}$$

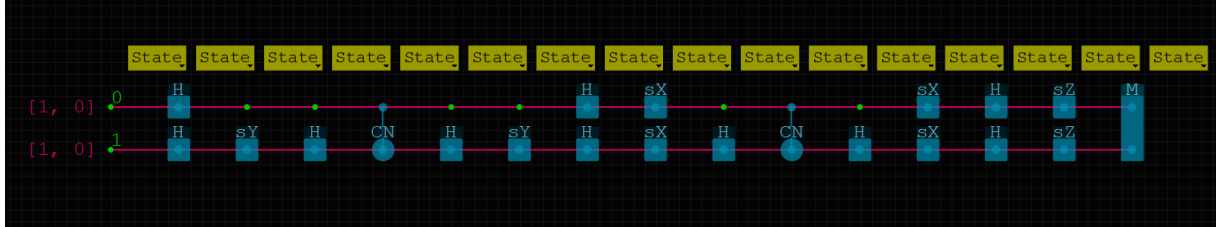
$$|\Psi_{12}\rangle = (X \otimes X) |\Psi_{11}\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_{12}\rangle = \frac{1}{2}(-|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)}$$

$$|\Psi_{13}\rangle = (H \otimes H) |\Psi_{12}\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_{13}\rangle = -|01\rangle}$$

$$|\Psi_{14}\rangle = (Z \otimes Z) |\Psi_{13}\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_{13}\rangle = |01\rangle}$$

### A.3 SOLUÇÃO PARA O ESTADO $|10\rangle$

O diagrama completo do circuito quântico para este estado pode ser observado na Figura 42.



**Figura 42** – Circuito completo realizada no software Q-kit para o estado  $|10\rangle$ .

Considerando o estado inicial sendo  $|00\rangle$ :

$$|\Psi_0\rangle = |00\rangle$$

$$|\Psi_1\rangle = (H \otimes H) |\Psi_0\rangle \quad \Rightarrow \quad |\Psi_1\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$$

$$|\Psi_2\rangle = (I \otimes Y) |\Psi_1\rangle \quad \Rightarrow \quad |\Psi_2\rangle = \frac{i}{2}(-|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$$

$$|\Psi_3\rangle = (I \otimes H) |\Psi_2\rangle \quad \Rightarrow \quad |\Psi_3\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(-|01\rangle - |11\rangle)$$

$$|\Psi_4\rangle = CNOT |\Psi_3\rangle \quad \Rightarrow \quad |\Psi_4\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(-|01\rangle - |10\rangle)$$

$$|\Psi_5\rangle = (I \otimes H) |\Psi_4\rangle \quad \Rightarrow \quad |\Psi_5\rangle = \frac{i}{2}(-|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)$$

$$|\Psi_6\rangle = (I \otimes Y) |\Psi_5\rangle \quad \Rightarrow \quad |\Psi_6\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$$

$$|\Psi_7\rangle = (H \otimes H) |\Psi_6\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_7\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)}$$

$$|\Psi_8\rangle = (X \otimes X) |\Psi_7\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_8\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)}$$

$$|\Psi_9\rangle = (I \otimes H) |\Psi_8\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_9\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)}$$

$$|\Psi_{10}\rangle = CNOT |\Psi_9\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle)}$$

$$|\Psi_{11}\rangle = (I \otimes H) |\Psi_{10}\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_{11}\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)}$$

$$|\Psi_{12}\rangle = (X \otimes X) |\Psi_{11}\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_{12}\rangle = \frac{1}{2}(-|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)}$$

$$|\Psi_{13}\rangle = (H \otimes H) |\Psi_{12}\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_{13}\rangle = -|10\rangle}$$

$$|\Psi_{14}\rangle = (Z \otimes Z) |\Psi_{13}\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Psi_{14}\rangle = |10\rangle}$$